



Pour contrôler les caractéristiques de l'épreuve informatisée, trois aspects sont décrits dans chaque item :

- **Les compétences mathématiques évaluées**, qui comprennent des aspects de la culture mathématique applicables dans n'importe quel environnement – pas uniquement informatique – et qui sont mesurées dans chaque item informatisé.
- **Les compétences en mathématiques et en informatique**, qui consistent à faire des mathématiques avec l'aide d'outils informatiques ou autres. Ces compétences sont évaluées dans certains des items informatisés (mais pas tous). L'épreuve informatisée peut évaluer les compétences suivantes :
 - créer un graphique (à secteurs, en bâtons, en courbes) à partir de données figurant dans un tableau par exemple, à l'aide d'« assistants » simples ;
 - générer des graphiques de fonctions et les utiliser pour répondre à des questions sur les fonctions ;
 - trier des données et prévoir des stratégies efficaces de tri ;
 - utiliser des calculatrices de poche ou des calculatrices sur ordinateur ;
 - utiliser des instruments virtuels, tels qu'une règle ou un rapporteur virtuel ; et
 - transformer des images à l'aide d'une boîte de dialogue ou de la souris, par exemple faire pivoter des images, les réfléchir ou les traduire.
- **Les compétences en technologies de l'information et de la communication (TIC)**, qui sont fondamentales pour répondre à une épreuve informatisée, au même titre que des compétences d'utilisation de l'écrit sont fondamentales pour répondre à une épreuve papier-crayon. Parmi ces compétences, citons la capacité à utiliser du matériel de base (la souris, le clavier, etc.) et la connaissance de conventions élémentaires (les flèches pour se déplacer et les boutons pour exécuter des commandes, par exemple). L'intention est de limiter autant que faire se peut la nécessité d'utiliser ces compétences dans toutes les épreuves informatisées.

SYNTHÈSE

L'objectif de l'enquête PISA concernant la culture mathématique est d'élaborer des indicateurs montrant l'efficacité avec laquelle les pays préparent leurs élèves à utiliser les mathématiques dans tous les aspects de leur vie personnelle, civique et professionnelle, en tant que citoyens constructifs, engagés et réfléchis. Pour ce faire, nous avons défini la culture mathématique dont les composantes importantes sont décrites dans le présent cadre d'évaluation. Les items de mathématiques qui ont été conçus, puis choisis pour constituer les épreuves du cycle PISA 2012 sur la base de cette définition et de ce cadre d'évaluation reflètent l'éventail de contextes, contenus et processus mathématiques pertinents. Ces items permettent de déterminer dans quelle mesure les élèves sont capables d'utiliser ce qu'ils ont appris. Ils amènent les élèves à utiliser leurs connaissances, à s'engager dans des processus et à exploiter leurs facultés pour résoudre des problèmes qui se posent dans des expériences du monde réel. Les problèmes sont présentés sous divers formats et sont accompagnés d'orientations et d'indices sur la structure qui sont plus ou moins explicites, mais l'accent est mis sur l'aspect pratique des problèmes, auxquels les élèves doivent réfléchir eux-mêmes.

Encadré 1.1. **Les facultés mathématiques fondamentales et leur relation avec la difficulté des items**

Analyser les aspects des facultés mathématiques fondamentales qui sont requis pour concevoir, puis appliquer une solution est un bon moyen de déterminer la difficulté empirique des items (Turner, 2012 ; Turner et Adams, 2012 ; Turner *et al.*, à paraître). Les items les plus faciles requièrent l'exploitation de quelques facultés à peine, d'une façon relativement directe. Les items les plus difficiles requièrent l'exploitation complexe de plusieurs facultés. Pour estimer a priori la difficulté des items, il faut tenir compte à la fois du nombre de facultés à mettre en œuvre et de la complexité de leur activation. Les sections suivantes décrivent les caractéristiques qui rendent l'activation d'une faculté plus ou moins complexe (voir également Turner, 2012).

Communication : divers facteurs déterminent le niveau et l'ampleur des exigences d'une tâche en matière de communication, et la capacité des individus à répondre à ces exigences indique la mesure dans laquelle ils possèdent la faculté de communication. Côté réception, ces facteurs sont notamment la longueur et la complexité du texte ou de l'objet à lire et à interpréter, le caractère familier des idées ou des informations auxquelles il est fait référence dans le texte ou l'objet, la mesure dans laquelle il faut dégager les informations pertinentes d'un enchevêtrement d'informations, l'ordre des informations et la mesure dans laquelle cet ordre correspond à l'ordre des processus à mener pour interpréter et utiliser les informations, et la diversité des éléments (texte, graphique, diagramme, tableau, etc.) à interpréter les uns par rapport aux autres. Côté expression, les items les plus faciles sont ceux qui appellent simplement une réponse sous forme de chiffre. La difficulté de la communication augmente lorsque la solution aux items doit être construite, par exemple lorsque les élèves doivent expliquer ou justifier leur résultats oralement ou par écrit.

...



Mathématisation : certaines tâches ne requièrent pas de mathématisation – que ce soit parce que le problème se présente déjà sous une forme suffisamment mathématique ou parce que la relation entre le modèle et la situation qu'il représente n'est pas nécessaire pour résoudre le problème. La mathématisation est la moins difficile lorsque les élèves doivent interpréter un modèle donné et faire des inférences directement ou traduire directement une situation en mathématiques (par exemple, structurer et conceptualiser la situation d'une façon pertinente, identifier et sélectionner des variables pertinentes, réunir des mesures pertinentes et/ou faire des diagrammes). La mathématisation devient plus difficile lorsque les élèves doivent modifier ou utiliser un modèle donné pour comprendre l'évolution de conditions ou interpréter des relations inférées, choisir un modèle familier dans le respect de contraintes limitées et clairement articulées, ou créer un modèle où les variables, les relations et les contraintes sont explicites et claires. À un degré de difficulté plus élevé encore, la mathématisation consiste à créer ou interpréter un modèle dans une situation où de nombreuses hypothèses, variables, relations et contraintes doivent être identifiées ou définies, et à vérifier que le modèle est conforme aux exigences de la tâche ou à évaluer ou comparer des modèles.

Représentation : cette faculté mathématique est la moins difficile à mettre en œuvre lorsque les tâches consistent à manipuler directement une représentation, par exemple passer directement du texte aux chiffres, ou lire directement une valeur dans un graphique ou un tableau. La charge cognitive des tâches augmente en matière de représentation lorsqu'elles requièrent la sélection et l'interprétation d'une représentation standard ou familière par rapport à une situation, et plus encore lorsqu'elles consistent à utiliser ou traduire deux ou plusieurs représentations par rapport à une situation, y compris à modifier une représentation, ou à comprendre et utiliser une représentation non standard au travers d'un processus complexe de décodage et d'interprétation, à concevoir une représentation qui englobe les aspects clés d'une situation complexe, ou à comparer ou à évaluer des représentations différentes.

Raisonnement et argumentation : dans les tâches où l'exploitation de cette faculté est minime, le raisonnement peut consister simplement à suivre les instructions fournies. Les items plus difficiles demandent une certaine réflexion pour établir des liens entre différents fragments d'information afin de faire des inférences (par exemple, établir un lien entre des composantes distinctes d'un problème ou se livrer à un raisonnement direct dans un seul aspect du problème). À un degré de difficulté plus élevé, les items requièrent l'analyse d'informations pour suivre ou créer une argumentation en plusieurs étapes, établir un lien entre plusieurs variables ou raisonner à partir de sources d'information différentes. À un niveau plus élevé encore, les élèves doivent résumer et évaluer des informations, utiliser ou créer un raisonnement en plusieurs étapes pour justifier des inférences, ou faire des généralisations en se basant sur plusieurs fragments d'information et en les combinant dans un but précis.

Conception de stratégies : les tâches où l'exploitation de cette faculté est minime demandent souvent simplement aux élèves de poser des actes, selon une stratégie qui est décrite ou qui va de soi. À un degré de difficulté légèrement plus élevé, les élèves peuvent avoir à choisir une stratégie adaptée compte tenu des informations pertinentes qui leur sont fournies pour aboutir à une conclusion. La charge cognitive est plus élevée lorsque les élèves doivent concevoir et construire une stratégie pour transformer des informations fournies afin d'aboutir à une conclusion. Dans les tâches encore plus difficiles, les élèves doivent construire une stratégie complexe pour trouver une solution exhaustive ou une conclusion généralisée, ou évaluer ou comparer plusieurs stratégies possibles.

Utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique : la difficulté de l'exploitation de cette faculté varie énormément selon les tâches. Dans les tâches les plus simples, les élèves ne doivent pas utiliser de règles mathématiques ou d'expressions symboliques qui vont au-delà des opérations arithmétiques fondamentales, avec des chiffres peu élevés ou faciles à manipuler. Dans les tâches plus difficiles, ils peuvent avoir à enchaîner des opérations arithmétiques, à utiliser directement une relation fonctionnelle simple soit implicite, soit explicite (une relation linéaire familière, par exemple), à utiliser des symboles mathématiques formels (par substitution directe ou via un enchaînement d'opérations arithmétiques impliquant des fractions et des décimales), ou à utiliser directement une définition formelle, une convention ou un concept symbolique de mathématiques. La charge cognitive augmente lorsque les élèves doivent utiliser et manipuler explicitement des symboles (recomposer une formule de façon algébrique, par exemple) ou utiliser des formules, des règles, des définitions, des conventions ou des procédures mathématiques sur la base de la combinaison de plusieurs relations ou concepts symboliques. À un degré de difficulté plus élevé encore, les élèves doivent appliquer des procédures mathématiques formelles en plusieurs étapes, utiliser avec souplesse des relations fonctionnelles ou algébriques, ou utiliser des connaissances et des techniques mathématiques pour produire des résultats.

...



Utilisation d'outils mathématiques : dans les tâches qui ne demandent qu'une exploitation minimale de cette faculté, les élèves peuvent avoir à utiliser directement des outils familiers (un instrument de mesure, par exemple) dans des situations où ces outils sont d'usage courant. La difficulté augmente lorsque l'utilisation de l'outil implique d'enchaîner des processus ou d'établir des liens entre des informations différentes, que les outils sont moins familiers ou que la situation dans laquelle l'outil doit être utilisé est moins familière. Elle augmente encore lorsque l'outil doit être utilisé pour traiter de nombreux fragments d'information et établir des liens entre eux, que l'outil doit l'être dans une situation qui est assez différente de celle où il est d'usage courant, que l'outil est complexe en soi et offre de nombreuses possibilités, ou que les élèves doivent réfléchir pour comprendre et évaluer les mérites et les limites de l'outil.

EXEMPLES D'ITEMS PISA DE MATHÉMATIQUES

Les items PISA qui suivent ont été rendus publics. Ils illustrent des nuances et des aspects pertinents du cadre d'évaluation du cycle PISA 2012. Les sept items proposés ont été sélectionnés pour montrer l'éventail de types d'items, de processus, de contenus et de contextes, et pour décrire l'activation des facultés mathématiques fondamentales, mais ils ne donnent pas toute la mesure de chaque aspect.

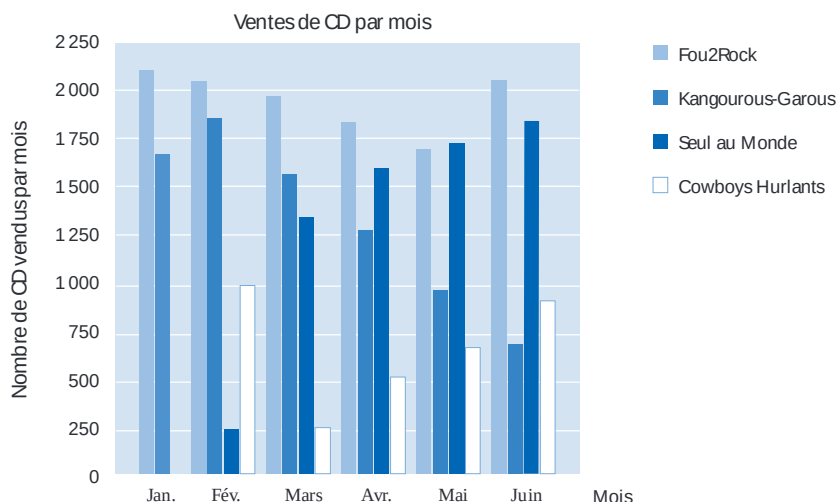
HIT-PARADE

La première unité proposée à titre d'exemple s'intitule *HIT-PARADE*. Elle est constituée d'un stimulus, en l'occurrence un texte et un graphique en bâtons qui montre les ventes de CD de quatre groupes pendant six mois, et de trois items à choix multiple (voir la figure 1.4).

■ Figure 1.4 ■

Items de l'unité *HIT-PARADE*

En janvier, les groupes Fou2Rock et Kangourous-Garous ont chacun sorti un nouveau CD. En février, c'était au tour des groupes Seul au Monde et Cowboys Hurlants de sortir chacun leur CD. Le diagramme suivant montre les ventes de ces CD de janvier à juin.





QUESTION 1

Combien de CD le groupe *Cowboys Hurlants* a-t-il vendus en avril ?

- A. 250
- B. 500
- C. 1 000
- D. 1 270

QUESTION 2

Au cours de quel mois le groupe *Seul au Monde* a-t-il vendu, pour la première fois, plus de CD que le groupe *Kangourous-Garous* ?

- A. Aucun mois
- B. Mars
- C. Avril
- D. Mai

QUESTION 3

Le producteur des *Kangourous-Garous* s'inquiète car le nombre de CD qu'ils ont vendus a diminué de février à juin.

À combien peut-on estimer leurs ventes du mois de juillet si cette tendance à la baisse continue ?

- A. 70 CD
- B. 370 CD
- C. 670 CD
- D. 1 340 CD

Les pays PISA ont été invités à remplacer les noms des groupes par des noms de groupes fictifs, adaptés à leur contexte local, lors de la préparation de leur version nationale.

L'unité *HIT-PARADE* a été administrée lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012. Les trois items de cette unité se classent dans la catégorie de contenus *Incertitude et données* puisque les élèves doivent lire, interpréter et utiliser des données présentées sous une forme graphique d'ordre mathématique, et dans la catégorie de *Contextes sociétaux*, car les données se rapportent à des informations publiques à propos de ventes de disques que l'on peut trouver dans un journal, un magazine de musique ou en ligne. Les deux premiers items se classent dans la catégorie de processus *Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques*, car ils consistent à interpréter les informations mathématiques présentées dans le graphique par rapport à des caractéristiques du contexte, alors que le troisième item se classe dans la catégorie *Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*, car il consiste à appliquer des connaissances en matière de procédures pour manipuler la représentation mathématique, puis faire des inférences. Ces trois items comptent parmi les plus faciles administrés lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012.

Dans la question 1 (reprise dans la figure 1.4), les élèves doivent lire directement des données dans le graphique pour répondre à une question en rapport avec le contexte. Ils doivent s'orienter vers les informations fournies, identifier la série de données qui indique les ventes du groupe concerné et le segment qui représente le mois concerné dans cette série de données, puis lire directement la valeur « 500 CD » en ordonnée. Comme le texte est simple et clair, l'item appelle une activation minimale de la faculté de *communication*. La *stratégie* à utiliser va de soi : il suffit de localiser les informations demandées dans le graphique. La *mathématisation* consiste à faire une inférence à propos des ventes directement à partir du modèle. La faculté de *représentation* intervient peu, car il suffit de lire une valeur directement dans un graphique. Le format du graphique est censé être familier pour la plupart des adolescents de 15 ans, auxquels le seul effort demandé est de lire l'intitulé des données. L'un des axes du graphique représente des catégories (mois) et la hauteur du bâton est précisée (500), de sorte que les élèves n'ont pas à comprendre d'échelle. Les connaissances *techniques* requises sont minimales, si ce n'est que le format du graphique doit être familier, et seule une inférence directe doit être faite, d'où le niveau très faible de *raisonnement* et d'*argumentation*. Cet item est extrêmement facile : 87 % des élèves y ont répondu correctement (option B).

La question 2 n'est que légèrement plus difficile : 78 % des élèves environ y ont répondu correctement (option C). Pour y répondre, les élèves doivent observer la relation entre deux séries de données présentées dans le graphique et comprendre son évolution au fil du temps pour réaliser que la situation concernée est apparue pour la première fois en avril.

La difficulté de cet item est similaire à celle du premier item en matière de *communication*. L'activation de la faculté de *stratégie* est légèrement plus difficile, car les élèves doivent associer plusieurs éléments provenant des deux séries de données. La *mathématisation* consiste ici aussi à faire une inférence à propos des ventes, de manière assez directe, à partir du graphique. Cet item est légèrement plus difficile en matière de *représentation* que le premier, car les élèves doivent établir un lien entre les deux séries de données et tenir compte de la variable du temps. Il est aussi facile que le premier en matière d'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique*, car seule une comparaison quantitative est requise. Enfin, il est légèrement plus difficile en matière de *raisonnement* et d'*argumentation*, car les élèves doivent enchaîner plusieurs étapes de raisonnement.

La question 3 est assez différente des deux premières, dans la mesure où elle demande essentiellement aux élèves de comprendre une relation mathématique décrite dans le graphique, puis de l'extrapoler pour prévoir la valeur d'un mois



à venir. Le lien avec le contexte est toujours bien présent, mais les élèves doivent essentiellement travailler sur la base des informations mathématiques qui leur sont fournies. Pour répondre à la question, ils peuvent, par exemple, lire les valeurs de chaque mois dans la série concernée, estimer la réduction moyenne de la valeur de chaque mois, puis appliquer cette réduction à la valeur du dernier mois. La faculté de *communication* intervient peu. Tout l'enjeu est d'éviter de se faire distraire par les séries de données des autres groupes. Toutefois, la seule réponse incorrecte courante, l'option C, est vraisemblablement due à une mauvaise compréhension du passage « si cette tendance à la baisse continue » : 15 % des élèves ont choisi cette option estimant que les ventes seraient les mêmes en juillet qu'en juin. Ils ont peut-être choisi la valeur constante parce qu'elle perpétuait les mauvais chiffres de vente de juin en juillet. La faculté de *stratégie* intervient de toute évidence davantage que dans les deux premières questions et son exploitation requiert un certain suivi. Il y a des décisions à prendre, notamment celle de savoir s'il vaut mieux utiliser les chiffres de ce groupe entre février et juin ou se baser sur la variation moyenne entre février et juin, s'il faut faire un calcul exact, dessiner ou visualiser une courbe de tendance, ou utiliser des estimations approximatives et remarquer que les ventes diminuent chaque mois d'un peu plus d'un niveau sur l'échelle en ordonnée. La *mathématisation* consiste à manipuler légèrement le modèle fourni par rapport au contexte, des calculs s'imposent (faire plusieurs soustractions de nombres à plusieurs chiffres, lire l'évolution sur une échelle), ce qui ajoute à la difficulté en matière d'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique*. L'item consiste à faire une inférence à propos de la relation tendancielle décrite dans le graphique en matière de *représentation*, et à enchaîner quelques étapes de *raisonnement*. Toutefois, cet item est relativement facile aussi : 76 % des élèves y ont répondu correctement (option B) lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012.

■ Figure 1.5 ■

Items de l'unité ASCENSION DU MONT FUJI

ASCENSION DU MONT FUJI

Le mont Fuji est un célèbre volcan éteint, situé au Japon.

QUESTION 1

Le mont Fuji n'est accessible au public que du 1^{er} juillet au 27 août chaque année. Environ 200 000 personnes font l'ascension du mont Fuji pendant cette période.

En moyenne, combien de personnes environ font l'ascension du mont Fuji chaque jour ?

- A. 340
- B. 710
- C. 3 400
- D. 7 100
- E. 7 400

QUESTION 2

La voie Gotemba, qui conduit au sommet du mont Fuji, fait environ 9 kilomètres (km) de long.

Les marcheurs doivent être de retour de la randonnée de 18 km pour 20 heures.

Toshi estime qu'il peut gravir la montagne à une vitesse moyenne de 1,5 kilomètre/heure, et en redescendre en doublant cette vitesse. Ces vitesses tiennent compte des pauses-repas et des temps de repos.

D'après les vitesses estimées par Toshi, à quelle heure au plus tard doit-il commencer sa randonnée afin de pouvoir être de retour pour 20 heures ?

QUESTION 3

Lors de sa randonnée sur la voie Gotemba, Toshi portait un podomètre pour comptabiliser ses pas.

Son podomètre indique qu'il a fait 22 500 pas lors de la montée.

Estimez la longueur moyenne des pas de Toshi lors de la montée de 9 kilomètres de la voie Gotemba. Donnez votre réponse en centimètres (cm).

Réponse cm



ASCENSION DU MONT FUJI

La deuxième unité proposée à titre d'exemple s'intitule *ASCENSION DU MONT FUJI* (voir la figure 1.5). La première question est un item à choix multiple et les deux dernières, des items à réponse construite appelant une réponse sous forme de chiffre. Le troisième item permet l'octroi d'un *crédit partiel*, une forme de codage utilisée dans un pourcentage limité d'items PISA auxquels des réponses de qualité variable peuvent être données et sont associées à un niveau de compétence nettement différent.

L'unité *ASCENSION DU MONT FUJI* a été administrée lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012 avant d'être rendue publique. Les questions 1 et 3 se classent dans la catégorie de contenus *Quantité*, car elles demandent aux élèves de faire des calculs sur la base de dates et de mesures, et de faire des conversions. La question 2 est basée sur le thème de la vitesse, ce qui la classe dans la catégorie de contenus *Variations et relations*.

Ces questions se classent toutes dans la catégorie de *Contextes sociétaux*, car les données se rapportent à des informations sur l'accès du public au mont Fuji. Les deux premières questions illustrent le processus qui consiste à *formuler des situations de façon mathématique*, puisqu'elles demandent essentiellement aux élèves de créer un modèle mathématique pour répondre à la question.

La question 3 se classe dans la catégorie de processus *Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques* parce qu'elle demande essentiellement aux élèves de calculer une moyenne en prenant garde de bien convertir des unités, et donc de travailler en grande partie sur la base des détails mathématiques du problème au lieu de rapporter ces détails à des aspects du contexte. Il ressort de la campagne définitive du cycle PISA 2012 que la difficulté de ces trois questions varie. La première question est moyennement difficile, alors que les deux dernières sont très difficiles.

La question 1 demande aux élèves de calculer un nombre moyen de personnes par jour. Comme le texte est simple et clair, il fait peu appel à la faculté de *communication*. La *stratégie* requise est d'une difficulté modérée, car elle consiste à trouver le nombre de jours entre les dates fournies, puis à l'utiliser pour calculer une moyenne. Cette solution en plusieurs étapes requiert un certain suivi, qui relève aussi de la faculté *Conception de stratégies*. La *mathématisation* est très facile, car les quantités mathématiques requises sont fournies directement dans la question (le nombre de personnes par jour). Il en va de même pour la *représentation*, car la question ne contient que du texte et des chiffres. Les élèves doivent utiliser des connaissances *techniques* : ils doivent savoir comment calculer une moyenne et le nombre de jours entre des dates, faire une division (à l'aide ou non d'une calculatrice, selon l'option retenue dans chaque pays) et arrondir le résultat. Cette question fait peu appel à la faculté de *raisonnement* et d'*argumentation*. Elle est d'une difficulté moyenne : 46 % des élèves y ont répondu correctement (option C) lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012. Les réponses incorrectes les plus souvent choisies sont l'option E (19 % des élèves), auquel cas les élèves se sont basés sur 27 jours, au lieu d'additionner 31 et 27 jours, et l'option A (12 % des élèves), auquel cas les élèves ont commis une erreur de valeur.

La question 2 est nettement plus difficile : 12 % seulement des élèves y ont répondu correctement lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012. Sa difficulté tient notamment au fait qu'il s'agit d'un item à réponse construite et non à choix multiple, de sorte que les élèves n'ont aucun indice sur les réponses possibles, mais de nombreux autres facteurs ajoutent à sa difficulté. Lors du cycle PISA 2012, quelque 61 % des élèves y ont répondu de manière incorrecte, sans toutefois l'omettre.

La faculté de *communication* n'intervient guère, de surcroît uniquement sous l'aspect de la réception, comme dans la question 1. Côté expression, les élèves doivent simplement fournir une réponse sous forme de chiffre. La *stratégie* est nettement plus difficile, car les élèves doivent établir un plan sur la base de trois grandes composantes. Les élèves doivent calculer les temps d'ascension et de descente à partir des vitesses moyennes, puis calculer l'heure de départ en fonction de l'heure d'arrivée et du temps que prend la randonnée. La *mathématisation* requise est assez difficile, car elle consiste à comprendre, par exemple, que le temps consacré aux pauses-repas est compris et que la randonnée commence par l'ascension et se termine par la descente. La *représentation* est minimale, car il suffit aux élèves d'interpréter un texte. L'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* est assez difficile : les calculs sont relativement simples (même si diviser par le nombre décimal de 1,5 kilomètre/heure peut être difficile), mais ils demandent une précision constante et la formule à employer pour déduire le temps de la vitesse et de la distance est implicitement ou explicitement requise. Le *raisonnement* et l'*argumentation* sont relativement simples également.

La question 3 est également assez difficile. Elle consiste à calculer la longueur moyenne de pas à partir de la distance et du nombre de pas, et implique la conversion d'unités. Lors du cycle PISA 2012, 11 % des élèves ont obtenu un crédit



complet parce qu'ils ont indiqué la réponse correcte (40 cm) et 4 % ont obtenu un crédit partiel, parce qu'ils ont, par exemple, répondu « 0,4 » (laissant la longueur en mètres) ou « 4 000 » (sans doute à cause d'une erreur de conversion entre le mètre et le centimètre). Lors de la campagne définitive du cycle PISA 2012, 62 % des élèves y ont répondu de façon incorrecte, sans toutefois l'omettre. La faculté de *communication* intervient peu comme dans les questions précédentes, car le texte est relativement facile à comprendre et interpréter, et la question appelle une réponse sous forme de simple chiffre. La *stratégie* à utiliser pour répondre à la question 3 est similaire à celle décrite dans la question 1 – ces deux items consistent en effet à calculer une moyenne. Toutefois, si les deux questions consistent à calculer une moyenne, le *raisonnement* et l'*argumentation* sont nettement plus difficiles dans cette question que dans la première. Dans la question 1, les élèves doivent calculer un nombre de personnes par jour, sachant que le nombre de personnes est fourni et que le nombre de jours est facile à calculer. Dans la question 3, en revanche, ils doivent calculer la longueur moyenne de pas d'un individu à partir d'une distance totale et d'un nombre total de pas. Il faut un raisonnement plus poussé pour établir un lien entre ces quantités (entre la distance donnée et la longueur, par exemple). De même, la *mathématisation* est plus difficile dans cette troisième question, car les élèves doivent comprendre en quoi la longueur de pas, une variable du monde réel, est liée à des mesures globales. Apprécier le contexte, notamment savoir qu'un pas est susceptible d'être de l'ordre de 50 centimètres (et pas de 0.5 ou 500 centimètres) est utile pour juger de la plausibilité de la réponse. L'*utilisation d'opérations* et d'un *langage symbolique, formel et technique* est assez difficile, car les élèves doivent diviser un nombre peu élevé (9 kilomètres) par un nombre élevé (22 500 pas) et doivent connaître des facteurs de conversion. Cette question implique peu de *représentation*, car elle ne contient que du texte.

PIZZAS

L'item à réponse construite ouverte de l'unité PIZZAS (voir la figure 1.6) est présenté sous une forme simple, mais son contenu est riche : il illustre plusieurs éléments du cadre d'évaluation en mathématiques. Il a été administré lors du premier essai de terrain de l'enquête PISA, en 1999, puis a été rendu public pour servir d'exemple. Il illustre chaque version du cadre d'évaluation PISA en mathématiques depuis 2003. C'est l'un des items les plus difficiles de la batterie d'items utilisée lors de l'essai de terrain de 1999 : 11 % seulement des élèves y ont répondu correctement.

■ Figure 1.6 ■

Item de l'unité PIZZAS

Une pizzeria propose deux pizzas rondes de la même épaisseur, de tailles différentes. La plus petite a un diamètre de 30 cm et coûte 30 zeds. La plus grande a un diamètre de 40 cm et coûte 40 zeds.

Laquelle des deux pizzas est la plus avantageuse par son prix ? Indiquez votre raisonnement.

L'unité PIZZAS se situe dans un contexte *personnel*, vraisemblablement familier à de nombreux adolescents de 15 ans. Cet item se classe dans la catégorie *Contextes personnels*, car la question posée est de savoir quelle pizza est la plus avantageuse par son prix. Il n'est guère difficile à lire, ce qui permet aux élèves de se concentrer presque entièrement sur les aspects mathématiques de la tâche.

Des termes courants dans la vie de tous les jours doivent être interprétés de façon mathématique (« rondes », « même épaisseur », « tailles différentes »). La variable de *taille* est définie sous forme mathématique via les diamètres des deux pizzas. Le coût est indiqué dans une monnaie fictive, le zed. La taille et le coût sont mis en correspondance par l'expression « avantageuse par son prix ».

Cet item relève de plusieurs branches en mathématiques. Il devrait en principe se classer dans la catégorie de contenus *Espace et formes* puisqu'il contient des éléments géométriques. Les pizzas peuvent être modélisées sous la forme de fins cylindres circulaires, ce qui nécessite le calcul de la surface d'un cercle. Cet item pourrait aussi se classer dans la catégorie de contenus *Quantité* à cause de la nécessité implicite de comparer des quantités de pizza par rapport à leur prix. Toutefois, toute la difficulté de l'item tient à la conceptualisation des relations entre les propriétés des pizzas et à la façon dont les propriétés pertinentes changent entre la petite et la grande pizza. Comme ces aspects sont au cœur du problème, cet item se classe dans la catégorie de contenus *Variations et relations*.

Cet item se classe dans la catégorie de processus *Formulation*. L'étape clé pour résoudre ce problème, difficile sur le plan cognitif, consiste à formuler un modèle mathématique qui décrit le concept que recèle l'expression « avantageuse par son prix ». Les élèves doivent comprendre que comme l'épaisseur des pizzas est en principe uniforme et qu'elle est identique dans les deux pizzas, ils doivent concentrer leur analyse sur la superficie circulaire des pizzas et non sur leur volume ou leur quantité. La relation entre la quantité de pizza et la quantité d'argent est à intégrer dans le concept



de l'expression « avantageuse par son prix », soit le coût par unité de superficie. La superficie par coût unitaire est une autre variante possible. En mathématiques, le coût peut être calculé directement, puis comparé entre les deux pizzas : le coût du cercle plus grand est inférieur. Dans le monde réel, l'interprétation est que la grande pizza est meilleure marché.

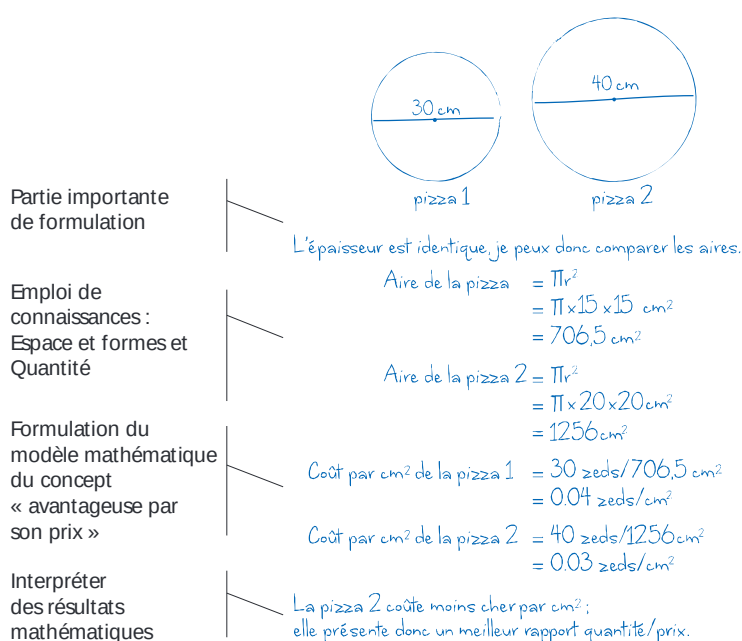
Un autre raisonnement, qui montre plus clairement encore pourquoi cet item se classe dans la catégorie de contenus *Variations et relations*, serait de postuler (implicitement ou explicitement) que la superficie d'un cercle augmente en proportion du carré de son diamètre, soit de $(4/3)^2$, alors que le coût n'augmente que dans une proportion de $(4/3)$. Comme $(4/3)^2$ est supérieur à $(4/3)$, la grande pizza est meilleure marché.

Comme toute la difficulté de l'item consiste à formuler ses aspects de façon mathématique, il se classe dans la catégorie de processus *Formuler des situations de façon mathématique*. Des aspects des deux autres catégories de processus y sont également manifestes. Les élèves doivent employer à bon escient le modèle une fois qu'ils l'ont formulé, se livrer à un raisonnement approprié et utiliser des connaissances mathématiques en matière de surface et de proportions. Ils doivent ensuite interpréter le résultat pour le replacer dans le contexte de la question.

Pour résoudre cet item de l'unité *PIZZAS*, les élèves doivent exploiter leurs facultés mathématiques fondamentales à des degrés divers. La *communication* intervient relativement peu lorsqu'il s'agit de lire et d'interpréter l'énoncé qui est assez direct, mais intervient davantage lorsqu'il s'agit de présenter et d'expliquer la solution. La *mathématisation* est à la clé du problème : les élèves doivent en effet formuler un modèle pour décrire le concept « avantageuse par son prix ». Les élèves doivent créer une *représentation* des aspects pertinents du problème, notamment la représentation symbolique de la formule permettant de calculer la superficie et l'expression de taux qui représentent le concept « avantageuse par son prix », pour élaborer leur solution. Les *raisonnements* (pour décider que l'épaisseur peut être ignorée et justifier l'approche adoptée et les résultats obtenus) sont considérables et la *conception de stratégies* permettant de contrôler les calculs et les processus de modélisation est un aspect difficile dans ce problème. L'*utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique* s'impose, car les élèves doivent utiliser leurs connaissances en matière de concepts, de faits et de procédures pour aborder la géométrie des cercles et calculer les taux. L'*utilisation d'outils mathématiques* n'est guère difficile si les élèves savent utiliser correctement une calculatrice.

■ Figure 1.7 ■

Exemple de réponse à l'item de l'unité *PIZZAS*



DÉCHETS

L'item *DÉCHETS* (voir la figure 1.8) illustre lui aussi certains aspects du cadre d'évaluation de la culture mathématique. Cet item à réponse construite a été administré lors de la campagne définitive du cycle PISA 2003 avant d'être rendu public. Le pourcentage de réponses correctes à cet item s'établit à 51 %, en moyenne, dans les pays de l'OCDE, ce qui le place au milieu du spectre de difficulté de la batterie d'items.

■ Figure 1.8 ■

Item de l'unité *DÉCHETS*

Pour un devoir portant sur l'environnement, des élèves ont recueilli des informations sur le temps de décomposition des différents types de déchets que les gens jettent :

Type de déchets	Temps de décomposition
Peau de banane	1-3 ans
Pelure d'orange	1-3 ans
Boîtes en carton	0,5 année
Chewing gum	20-25 ans
Journaux	Quelques jours
Gobelets en polystyrène	Plus de 100 ans

Un élève envisage de présenter ces résultats sous forme d'un diagramme en bâtons.

Donnez une raison pour laquelle le diagramme en bâtons ne conviendra pas pour présenter ces données.

Cet item se classe dans la catégorie *Contextes scientifiques*, car il porte sur un sujet scientifique (le temps de décomposition), et dans la catégorie de contenus *Incertitude et données*, dans la mesure où il présente des données à interpréter, même si des contenus *Quantité* interviennent implicitement, puisque les élèves doivent apprécier l'importance relative des temps indiqués. Il se classe dans la catégorie de processus *Interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques*, car il demande essentiellement aux élèves d'évaluer l'adéquation d'un résultat mathématique (en l'occurrence un diagramme en bâtons fictif ou dessiné) pour décrire des données sur des éléments contextuels qui s'inspirent du monde réel. Cet item consiste à faire un raisonnement à propos des données fournies, à réfléchir sous l'angle mathématique à la relation entre les données et leur présentation, et à évaluer le résultat. Les élèves doivent comprendre qu'il ne serait pas judicieux de présenter ces données dans un diagramme en bâtons pour une des deux raisons suivantes : soit à cause de la très grande variance des temps de décomposition selon les déchets (qu'il n'est pas possible de représenter sous la forme d'un diagramme en bâtons standard), soit à cause de la variabilité des données dans certaines catégories (de sorte que sur un axe représentant le temps qui permettrait d'indiquer le temps de décomposition le plus long, les temps de décomposition les plus courts seraient invisibles). Les réponses telles que celles reproduites ci-dessous valent un crédit.

RÉPONSE 1

« Parce que ce serait difficile à faire dans un diagramme en bâtons puisqu'il y a 1-3, 1-3, 0.5, etc. Ce serait difficile de le faire exactement. »

RÉPONSE 2

« Parce qu'il y a une grande différence entre le chiffre le plus élevé et le chiffre le moins élevé, ce serait donc difficile d'être précis avec 100 ans et quelques jours. »

La résolution de l'item *DÉCHETS* passe par l'activation des facultés mathématiques fondamentales suivantes. La *communication* intervient à cause de la nécessité de lire le texte et d'interpréter le tableau et, dans une plus grande mesure, de la nécessité de rédiger un raisonnement succinct. La *mathématisation* de la situation n'est guère difficile, dans la mesure où les élèves doivent identifier et extraire des caractéristiques mathématiques clés d'un diagramme en bâtons dans chaque catégorie de déchets. Les élèves doivent interpréter des données présentées sous forme de tableau, puis imaginer une *représentation* graphique, avant d'établir un lien entre les deux représentations, ce qui est tout l'enjeu de l'item. Le *raisonnement* requis est relativement facile, tout comme la *conception de stratégies*. L'*utilisation*



d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique intervient, car les élèves doivent connaître des faits et des procédures pour imaginer ou dessiner un diagramme en bâtons et, surtout, comprendre l'échelle à employer pour imaginer l'ordonnée. L'utilisation d'outils mathématiques est selon toute vraisemblance inutile.

CONCERT ROCK

Un autre exemple d'item, tiré de l'unité *CONCERT ROCK* est présenté dans la figure 1.9. Cet item à choix multiple simple a été administré lors de l'essai de terrain précédant la campagne définitive du cycle PISA 2003. Il a été rendu public par la suite pour donner un aperçu des épreuves. Dans la batterie d'items utilisée lors de cet essai de terrain, il se classe parmi ceux d'une difficulté modérée : quelque 28 % des élèves y ont répondu correctement (option C). Cet item se classe dans la catégorie des *Contextes sociétaux*, car il concerne l'organisation d'un concert de rock, même s'il évoque une expérience personnelle, en l'occurrence celle de se trouver au milieu de la foule. Il se classe dans la catégorie de contenus *Quantité* parce qu'il requiert un calcul, même s'il contient quelques éléments en rapport avec la catégorie *Espace et formes*.

■ Figure 1.9 ■

Item de l'unité *CONCERT ROCK*

Un terrain rectangulaire mesurant 100 m sur 50 m a été réservé pour le public d'un concert de rock.

Toutes les places ont été vendues et le terrain est plein de fans, tous debout.

Lequel des nombres ci-dessous est probablement la meilleure estimation du nombre total de personnes assistant au concert ?

- A. 2 000
- B. 5 000
- C. 20 000
- D. 50 000
- E. 100 000

Cet item fait appel aux trois catégories de processus, mais surtout à celui qui consiste à *formuler des situations de façon mathématique*, car il demande aux élèves de donner un sens aux informations contextuelles qui leur sont fournies (la forme et les dimensions du terrain, et le fait que le concert affiche complet et que les fans sont debout). Les élèves doivent également identifier l'information manquante, qu'ils peuvent toutefois estimer sans trop de mal en se basant sur des hypothèses et des connaissances de la vie réelle. Ils doivent plus précisément concevoir un modèle pour déterminer l'espace requis par un individu ou un groupe de fans. En mathématiques, ils doivent *employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques* pour établir un lien entre la superficie du terrain et l'espace occupé par un fan ou un groupe de fans, et établir les comparaisons qui s'imposent, puis *interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques* pour vérifier la plausibilité de leur solution ou comparer les options de réponse aux résultats mathématiques de leurs calculs.

Il y a également un autre modèle. Les élèves peuvent aussi imaginer des rangées uniformes de fans debout sur toute la superficie du terrain, puis estimer le nombre de fans en multipliant leur estimation du nombre de rangées par leur estimation du nombre de fans par rangée. Les élèves doués pour formuler des modèles mathématiques sont susceptibles d'apprécier l'efficacité de ce modèle, en dépit du contraste important qu'il présente avec le comportement de fans à un concert de rock. La réponse correcte vaut un crédit complet, quel que soit le modèle utilisé par les élèves.

Les facultés mathématiques fondamentales interviennent dans cet item de la façon suivante. Les facultés en *communication* sont relativement peu mises à contribution, car il suffit aux élèves de lire et de comprendre le texte. L'importance mathématique de termes tels que « mesurant » et « rectangulaire », la phrase « le terrain est plein » et le substantif « estimation » employé dans la consigne doivent être compris, puis interprétés. Des connaissances du monde réel peuvent être utiles pour ce faire. Cet item passe par un processus assez complexe de *mathématisation*, car il demande aux élèves de formuler des hypothèses sur l'espace qu'une personne occupe debout et de créer un modèle de base du type : « nombre de fans » $\times$ « espace moyen d'un fan » = « superficie du terrain ». Les élèves doivent se *représenter* la situation mentalement ou la dessiner pour concevoir le modèle qui établit un lien entre l'espace occupé par un fan et la superficie du terrain. La *conception de stratégies* intervient à plusieurs stades du processus de résolution, notamment lorsque les élèves décident de la façon dont ils vont aborder le problème, imaginent le modèle qui pourrait se révéler

utile pour estimer l'espace occupé par un fan lors d'un concert et comprennent qu'ils vont devoir en passer par quelques étapes de vérification et de validation. Les élèves peuvent choisir, à titre de stratégie de résolution, de postuler l'espace par personne, de le multiplier par le nombre de personnes fourni dans chaque option de réponse, puis de comparer le résultat aux conditions indiquées dans la question. Ils peuvent aussi faire l'inverse, en l'occurrence partir de la superficie fournie et calculer l'espace par personne qu'implique chaque option de réponse, puis identifier la réponse qui satisfait le mieux aux critères indiqués dans la question. L'utilisation d'opérations et d'un langage symbolique, formel et technique intervient une fois que les élèves appliquent la stratégie qu'ils ont adoptée, quelle qu'elle soit, pour interpréter et utiliser les dimensions fournies, et faire les calculs requis pour mettre en correspondance la superficie du terrain et l'espace occupé par un individu. Les facultés de *raisonnement* et d'*argumentation* interviennent, car les élèves doivent bien réfléchir à la relation entre le modèle qu'ils ont conçu, la solution qu'ils ont obtenue et le contexte réel, pour valider leur modèle et vérifier qu'ils ont choisi la réponse correcte. L'utilisation d'outils mathématiques est vraisemblablement superflue.

MARCHE À PIED

L'unité PISA *MARCHE À PIED* (voir la figure 1.10) montre une relation algébrique quelque peu illogique mais bien établie entre deux variables, sur la base de l'observation d'un grand nombre d'individus marchant d'un pas naturel, et pose aux élèves deux questions qui leur demandent d'exploiter leurs connaissances et compétences en algèbre. Dans la deuxième question, ils doivent également faire usage de leurs facultés de réflexion stratégique, de raisonnement et d'argumentation dans une mesure qui est difficile pour de nombreux adolescents de 15 ans. Ces deux items ont été administrés lors de la campagne définitive du cycle PISA 2003, puis ont illustré le cadre d'évaluation du cycle PISA 2009 et d'autres publications. Ils demandent tous deux aux élèves de se baser sur les informations qui leur sont fournies pour construire leur réponse. Ils se classent tous deux dans la catégorie de contenus *Variations et relations*, car ils portent sur des relations entre variables exprimées sous forme algébrique. Ils se classent dans la catégorie des *Contextes personnels*, car ils se rapportent à des aspects en rapport direct avec des perspectives et le vécu d'individus, et dans la catégorie de processus *Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*, puisque les problèmes sont formulés en des termes qui possèdent déjà une structure mathématique et que leur résolution passe par une manipulation largement intramathématique d'objets et de concepts mathématiques.

■ Figure 1.10 ■

Items de l'unité *MARCHE À PIED*



L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas L est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.

Pour les hommes, la formule $\frac{n}{L} = 140$ donne un rapport approximatif entre n et L où :

n = nombre de pas par minutes ; et

L = longueur de pas en mètres.

QUESTION 1

Si la formule s'applique à la façon de marcher d'Henri et qu'Henri fait 70 pas par minute, quelle est la longueur de pas d'Henri ? Montrez vos calculs.

QUESTION 2

Bernard sait que la longueur de son pas est de 0,80 mètre. La formule s'applique à sa façon de marcher.

Calculez la vitesse à laquelle marche Bernard en mètres par minute et en kilomètres par heure. Montrez vos calculs.



Lors de la campagne définitive du cycle PISA 2003, 36 % des élèves ont répondu correctement à la question 1, ce qui en fait un item plus difficile que 70 % environ des items administrés lors de ce cycle. C'est surprenant car mathématiquement parlant, il ne leur demande que de remplacer la valeur $n = 70$ dans la formule et de manipuler la formule algébriquement, de façon assez directe, pour obtenir la valeur de L . Cet item confirme ce qui s'observe dans de nombreux items PISA : lorsque les items s'inscrivent dans un contexte qui s'inspire du monde réel, les élèves éprouvent souvent des difficultés à utiliser efficacement leurs connaissances et compétences en mathématiques, et ce même si les composantes mathématiques sont présentées clairement dans la question.

Les facultés mathématiques fondamentales interviennent comme suit dans cet item. Les facultés de *communication* sont à exploiter pour lire et comprendre le stimulus, puis pour articuler la solution et montrer le cheminement. Cet item ne demande pas véritablement de *mathématisation*, car le modèle mathématique est fourni sous une forme familière pour de nombreux élèves âgés de 15 ans. Les facultés de *représentation* sont à exploiter dans une mesure significative, car le stimulus inclut un élément graphique, du texte et une expression algébrique que les élèves doivent mettre en correspondance. Les facultés de *conception de stratégies* interviennent très peu dans le processus de résolution, car la stratégie à adopter est formulée de manière très claire dans la question. Les facultés de *raisonnement* et d'*argumentation* ne jouent qu'un rôle minime parce qu'une nouvelle fois, cette tâche est formulée de manière claire et que tous les éléments requis sont évidents. L'*utilisation d'opérations* et d'un *langage symbolique, formel et technique* s'impose pour procéder à la substitution et manipuler l'expression pour faire en sorte que L devienne le sujet de l'équation.

La question 2 est plus difficile : 20 % seulement des élèves y ont répondu correctement. Elle se classe donc parmi les 10 % d'items les plus difficiles qui aient été administrés lors du cycle PISA 2003. La *conception de la stratégie* est complexe, car les élèves ont un certain nombre d'étapes à franchir et doivent garder en ligne de mire le point final : comme la valeur de L est connue, ils peuvent trouver la valeur de n à partir de l'équation fournie ; ils doivent multiplier n par L pour obtenir la vitesse en mètres par minute, puis se livrer à un raisonnement proportionnel pour convertir cette vitesse en kilomètre par heure. Trois niveaux de crédit étaient prévus pour permettre de coder des réponses n'exposant que partiellement le raisonnement attendu pour la résolution du problème. La meilleure façon d'expliquer la différence de pourcentage de réponses correctes entre la question 2 et la question 1 est probablement de décrire les différents modes d'activation des facultés mathématiques fondamentales requis. Les élèves doivent utiliser leurs facultés de *communication* de manière comparable dans les deux questions lors de l'étape qui consiste à lire et comprendre la question, mais dans la question 2, ils doivent se servir du diagramme pour créer explicitement un lien entre un pas et la longueur de pas fournie – une relation qu'il est inutile d'établir dans la question 1. De plus, la présentation de la solution fait davantage appel à des facultés d'expression dans la question 2. Les élèves doivent passer par un processus de *mathématisation* puisqu'ils doivent concevoir un modèle proportionnel pour exprimer la vitesse de Bernard dans les unités requises pour résoudre le problème. Pour arriver à cette solution, les élèves doivent faire appel à des mécanismes de contrôle efficaces et soutenus dans le cadre d'un processus à étapes multiples ; les facultés de *conception de stratégies* interviennent donc à un niveau bien plus élevé que dans la question 1. La *représentation* intervient plus que dans la question 1, car les élèves doivent travailler plus activement avec la représentation algébrique qui leur est fournie. La mise en œuvre de la stratégie conçue et l'exploitation des représentations identifiées impliquent l'*utilisation d'opérations* et d'un *langage symbolique, formel et technique*, ce qui consiste à faire des manipulations algébriques, à appliquer des proportions et à faire des opérations arithmétiques pour procéder aux conversions requises. Les élèves doivent utiliser leurs facultés de *raisonnement* et d'*argumentation* dans toutes les étapes interdépendantes qu'ils doivent enchaîner pour parvenir à la solution. L'*utilisation d'outils mathématiques* intervient dans une mesure relativement faible si les élèves se servent bien de leur calculatrice.

MENUISIER

L'item PISA *MENUISIER* (voir la figure 1.11) a été administré lors des cycles PISA 2000 et 2003, avant d'être rendu public. Il illustre un format d'items à choix multiple dit « complexe » : les élèves doivent sélectionner une réponse parmi celles proposées dans plusieurs questions successives. Dans cet item, les élèves obtiennent un crédit complet s'ils répondent que tous les tracés, sauf le tracé B, peuvent être réalisés avec les planches fournies.

Cet item se classe dans la catégorie de contenus *Espace et formes*, car il porte sur des propriétés de formes, et dans la catégorie des *Contextes professionnels*, car il concerne un travail de menuiserie. Il se classe dans la catégorie de processus *Employer des concepts, faits, procédures et raisonnements mathématiques*, car il consiste en grande partie à appliquer des connaissances en matière de procédures à des objets bien définis, même si les élèves doivent aussi dans une certaine mesure *interpréter, appliquer et évaluer des résultats mathématiques*, puisqu'ils doivent établir un lien entre les objets mathématiques représentés et l'élément contextuel – la contrainte imposée par la quantité de planches disponibles.