Chapitre 11

Croissance et progrès technique : le modèle de Solow-Swan

Le point de départ de plusieurs tentatives visant à expliquer analytiquement les faits décrits au chapitre précédent est le modèle de croissance néo-classique, développé dans les années 50 par Solow (1956) et Swan (1956). Que l'on soit pour ou contre, le modèle Solow-Swan continue d'être au centre du débat entre les "anciennes" et les "nouvelles" théories de la croissance économique. Il est donc important de comprendre ses propriétés et ses prédictions, concernant notamment les effets de l'allocation de la production entre consommation et investissement sur l'accumulation du capital et le rôle critique que joue le progrès technique.

La première partie de ce chapitre présente la structure de base et les principales hypothèses du modèle de Solow-Swan. La deuxième partie dérive le sentier dynamique de la production et du stock de capital sous les hypothèses que le travail et les connaissances croissent de façon exogène. La troisième partie considère brièvement le cas dans lequel le taux de croisance de la population est lié de façon non-linéaire au ratio du capital au travail effectif. La quatrième partie analyse les effets des variations du taux de croissance de la main-d'oeuvre et du taux d'épargne sur le taux de croissance du produit par tête à court terme et à long terme. Les facteurs qui affectent la vitesse à laquelle l'ajustement à l'équilibre de long terme se réalise sont analysés en cinquième partie. La dernière partie évalue la capacité du modèle à expliquer certains des faits stylisés analysés au chapitre précédent.

1 Structure de base et hypothèses

La version de base du modèle Solow-Swan considère une économie fermée qui produit un seul bien (composite) et utilise le *travail* et le *capital*. Elle considère le **progrès technique** comme une donnée et le *taux d'épargne* comme étant exogène[1]. Il n'y a pas d'Etat, il y a un nombre fixe de firmes dans l'économie, chacune ayant la même technologie de production. En normalisant, le nombre de firmes à un pour des raisons de simplicité, la production globale peut donc être caractérisée par une *fonction de production agrégée*. Le prix de la production est constant et les prix des facteurs (salaires inclus) s'ajustent pour assurer la pleine utilisation de tous les inputs disponibles.

Formellement, le modèle se focalise sur quatre variables :

- le flux de la production, Y ;
- le stock de capital, K ;
- le nombre de travailleurs, L ;
- le *savoir* (connaissances) ou l'**efficacité du travail**, A.

L'économie combine le capital, le travail et le savoir pour produire. La fonction de production agrégée est donnée par[2]

$$Y = F(K, AL), \tag{1}$$

où le capital et le travail effectif sont supposés être **globalement complémentaires (Edgeworth)** ($F_{KL} > 0$).

Trois caractéristques de la fonction de production (1) doivent être notées dès le départ.

- Parce que K et L sont des variables de *stocks*, de façon stricte ce sont les *taux des flux de services* de ces facteurs – par exemple, le stock de capital multiplié par le taux d'utilisation des services de capital – qui devraient être inclus dans la fonction de production. Par simplicité, les taux d'utilisation des deux facteurs sont fixés à un.

[1] Plus précisément, le modèle considère la *fonction* d'épargne comme une donnée.

[2] En pratique, il y a des problèmes sérieux d'agrégation dans la mesure des stocks globaux des inputs - notamment le stock de capital physique - comme le spécifie l'équation (1). Cependant de tels problèmes ne se posent pas ici en raison de l'hypothèse selon laquelle l'économie ne produit qu'un seul bien.

- Le *temps* n'entre pas directement dans la fonction mais est plutôt pris en compte seulement à travers K, L et A. C'est-à-dire la production varie au cours du temps seulement si les inputs de production varient.
- A et L entrent dans la fonction de façon multiplicative. AL désigne la **quantité effective de travail** et le progrès technique qui entre dans la fonction est considéré comme **augmentant le travail** ou **neutre au sens de Harrod**.

Si la savoir est inclus sous la forme $Y = F(AK, L)$, le progrès technique est supposé comme **augmentant le capital** ou **neutre au sens de Solow**. S'il est inclus sous la forme $Y = AF(K, L)$, le progrès technique est **neutre au sens de Hicks**. L'hypothèse selon laquelle le progrès technique est neutre au sens de Harrod implique, comme on le montre plus bas (et étant donné les autres hypothèses sur lesquelles le modèle repose), que les parts relatives du capital et du travail dans la production demeurent constantes le long des sentiers pour lesquels le ratio capital/production demeure lui même constant. Bien qu'il existe des évidences limitées de l'importance de ces facteurs pour les pays en développement, ils semblent s'appliquer à long terme pour les pays industrialisés (voir Romer, 1989).

Plusieurs hypothèses supplémentaires caractérisent le modèle :

- Le **produit marginal** de chaque facteur est positif ($F_h > 0$, où $h = K$, AL) et chaque facteur de production a des **rendements décroissants** ($F_{hh} < 0$).
- La fonction de production est caractérisée par des **rendements d'échelle constants** (REC) en capital et en travail effectif, c'est-à-dire qu'en doublant les quantités de K et AL, la quantité produite double. Plus formellement, l'hypothèse REC implique qu'en multipliant K et AL par n'importe quel constante non-négative m, la production est multipliée du même facteur[3] :

$$F(mK, mAL) = mF(K, AL), \quad m \geq 0.$$

- Les facteurs de production autres que le capital, le travail et le savoir sont relativement insignifiants. En particulier, le modèle néglige la *terre*

[3]La condition REC est une hypothèse importante du modèle Solow-Swan et sera discutée en détail plus tard.

et les autres *ressources naturelles*. Si les ressources naturelles étaient importantes – comme on pourrait s'y attendre dans le cas des économies insulaires – le doublement du capital et du travail effectif pourrait moins que faire doubler la production. L'hypothèse de rendements constants du capital et du travail effectif toute seule serait donc inappropriée. Néanmoins, on considérera que cette hypothèse s'applique[4].

Sous l'hypothèse REC, la fonction de production peut être écrite en termes du *ratio* des facteurs de production. En fixant $m = 1/AL$ dans l'équation (1), il en résulte que

$$F(\frac{K}{AL}, 1) = \frac{1}{AL} F(K, AL), \tag{2}$$

où K/AL est le montant du capital physique par unité de travail effectif et $F(K, AL)/AL$ est Y/AL, la production par unité de travail effectif.

Supposons que $k = K/AL$, $y = Y/AL$, et $f(k) = F(k, 1)$. L'équation (2) peut être réécrite comme suit :

$$y = f(k), \quad f(0) = 0. \tag{3}$$

L'équation (3) lie la production par unité de travail effectif au capital par unité de travail effectif. Le terme $f(k)$ est défini comme la fonction de production sous sa *forme intensive*. La production positive est supposée requérir un niveau de capital positif ; autrement dit, le capital est un facteur de production indispensable.

Etant donné les hypothèses précédentes concernant les signes de F_K et F_{KK}, la fonction de production de forme intensive doit satisfaire les conditions suivantes :

$$f'(k) > 0; \quad f''(k) < 0.$$

La quantité $f'(k)$ est le produit marginal du capital, F_K, car

$$Y = F(K, AL) = ALf(\frac{K}{AL}) \Rightarrow F_K = \frac{\partial F(K, AL)}{\partial K} = ALf'(\frac{K}{AL}) \cdot \frac{1}{AL} = f'(k),$$

et est donc positive. De façon similaire, $f''(k) < 0$ car

$$F_{KK} = \frac{\partial^2 F(K, AL)}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} \left\{ ALf'(\frac{K}{AL}) \cdot \frac{1}{AL} \right\} = \frac{\partial}{\partial K} \left\{ f'(\frac{K}{AL}) \right\} = \frac{f''(k)}{AL}.$$

[4] Romer (1995) discute une extension du modèle de Solow-Swan dans laquelle la présence des ressources naturelles implique l'existence des rendements décroissants du capital et du travail. Le chapitre suivant examinera les implications des rendements croissants.

Par conséquent, les hypothèses ci-dessus impliquent que

- le produit marginal du capital est *positif* ;
- le produit marginal du capital *décroît* quand le capital (par unité de travail effectif) augmente.

En outre, la fonction de production de forme intensive est supposée satisfaire les **conditions de Inada** :

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

Ces conditions stipulent que le produit marginal du capital est très important quand le stock de capital est suffisamment petit et qu'il devient très petit quand le stock de capital devient très important ; leur rôle est d'assurer que le sentier de l'économie ne diverge pas comme on le discute plus bas[5].

Une fonction de production spécifique qui satisfait toutes les conditions ci-dessus est la **fonction Cobb-Douglas** :

$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4}$$

Cette fonction de production est facile à utiliser et elle semble être une première approximation raisonnable des techniques de production courantes. Pour montrer que la fonction Cobb-Douglas a des rendements d'échelle constants, multiplions les deux facteurs de production par m, on obtient :

$$(mK)^{\alpha}(mAL)^{1-\alpha} = m^{\alpha}m^{1-\alpha}K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} = mY.$$

La fonction de production Cobb-Douglas de forme intensive est obtenue en divisant les deux facteurs de production de l'équation (4) par AL, de sorte que

$$y = f(k) = (\frac{K}{AL})^{\alpha} = k^{\alpha}. \tag{5}$$

L'équation (5) implique que

$$f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} > 0, \quad f''(k) = -(1-\alpha)\alpha k^{\alpha-2} < 0.$$

[5]En fait, ces conditions sont plus fortes que celles que nécessitent les principaux résultats du modèle. Voir Burmeister et Dobell (1970, pp. 25-26).

On peut aussi vérifier que les conditions de Inada sont satisfaites

$$\lim_{k\to 0} \alpha k^{\alpha-1} = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \alpha k^{\alpha-1} = 0. \tag{6}$$

La fonction k^α est illustrée à la figure 11.1. La *pente* de la fonction est le produit marginal du capital, $\alpha k^{\alpha-1}$. Elle devient plus plate quand k augmente, comme l'implique l'hypothèse de produit marginal décroissant du capital.

On peut aussi vérifier qu'avec la fonction de production Cobb-Douglas, le progrès technique augmentant le travail, augmentant le capital et neutre au sens de Hicks (discuté plus tôt) est fondamentalement la même chose. Ceci s'explique par le fait que tous les facteurs de production entrent dans la fonction de façon multiplicative. Du fait de sa facilité de manipulation, la spécification Cobb-Douglas sera utilisée de façon systématique par la suite.

Pour compléter la description du modèle, il convient de spécifier l'allocation des ressources entre consommation, épargne et investissement et l'évolution dans le temps des stocks de capital, de travail et de savoir. Le travail et le savoir sont supposés croître à des taux exogènes constants :

$$\dot{L}/L = n, \quad \dot{A}/A = \gamma, \tag{7}$$

où γ peut être interprété comme le taux auquel le savoir autre que la connaissance technologique contenue dans l'équipement améliore, par exemple, les gains d'efficience dans les structures organisationnelles et les procédures de gestion.

En désignant par L_0 et A_0, les valeurs initiales de L et A, les expressions contenues dans (7) impliquent que[6] :

$$L = L_0 e^{nt}, \quad A = A_0 e^{\gamma t}. \tag{8}$$

La production est divisée entre la consommation, C et l'investissement, I :

$$Y = C + I. \tag{9}$$

L'épargne, S, définie comme $Y - C$, est supposée être une fraction constante, s, de la production :

$$S \equiv Y - C = sY, \quad 0 < s < 1. \tag{10}$$

[6] Pour vérifier cela, notons par exemple que $L = L_0 e^{nt}$ implique que $\dot{L} = nL_0 e^{nt} = nL$ et que la valeur initiale de L est $L_0 e^0 = L_0$.

Toute l'épargne est supposée absorbée par les firmes pour l'accumulation du capital. En combinant les équations (9) et (10), l'égalité épargne-investisement peut donc être écrite comme suit :

$$S = I = sY, \tag{11}$$

une égalité qui montre que le taux d'épargne est aussi la fraction de la production allouée à l'investissement[7].

Enfin, en faisant l'hypothèse qu'une unité de production allouée à l'investissement rapporte une unité de capital nouveau, que le stock de capital existant se déprécie au taux constant $\delta > 0$ et en utilisant l'équation (11), les variations du stock de capital (ou investissement net) peuvent être écrites comme suit :

$$\dot{K} = sY - \delta K. \tag{12}$$

Notons par $c = C/AL$ et $i = I/AL$,respevtivement la consommation et l'investment par unités effectives de travail. En utilisant l'équation (4), il vient :

$$c = (1-s)k^{\alpha}, \quad i = sk^{\alpha}. \tag{13}$$

La figure 11.1 montre graphiquement comment la production (par unités effectives de travail) est allouée entre la consommation, l'épargne et l'investissement.

2 La dynamique du capital et de la production

Pour déterminer le comportenement de l'économie au cours du temps sous la série d'hypothèses précédentes, il convient d'examiner uniquement le comportement du capital car le travail et le savoir croissent de façon exogène. Pour cela, il convient de se focaliser sur le *stock de capital par unités effectives de travail*, k, plutôt que sur le stock de capital lui-même. En différenciant l'expression $k = K/AL$ par rapport au temps, cela implique que

$$\dot{k} = (\frac{1}{AL})\dot{K} - (\frac{K}{A})\frac{\dot{L}}{L^2} - (\frac{K}{L})\frac{\dot{A}}{A^2},$$

[7] Par simplicité, l'hypothèse que l'épargne est une fraction constante du revenu sera maintenue dans ce chapitre et les deux suivants. Les modèles avec un taux d'épargne variable peuvent être dérivés des problèmes d'optimisation par les ménages mais sont mathématiquement plus exigeants. Pour une discussion, voir Barro et Sala-i-Martin (1995).

ou de façon équivalente

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{AL} - (\frac{K}{AL})\frac{\dot{L}}{L} - (\frac{K}{AL})\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{K}}{AL} - (\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A})k. \tag{14}$$

De l'équation (8), $\dot{L}/L = n$ et $\dot{A}/A = \gamma$; et $\dot{K}$ est donné par l'équation (12). En substituant ces expressions dans le membre droit de l'équation (14), il en résulte que

$$\dot{k} = \frac{sY - \delta K}{AL} - (n + \gamma)k,$$

ou

$$\dot{k} = \frac{sY}{AL} - \delta k - (n + \gamma)k,$$

et enfin, en utilisant le fait que de l'équation (4), $Y/AL = k^\alpha$:

$$\dot{k} = sk^\alpha - (n + \gamma + \delta)k, \quad n + \gamma + \delta > 0, \tag{15}$$

avec la condition initiale $k_0 = K_0/A_0L_0$.

L'équation (15) est une *équation non-linéaire de différence de premier-ordre* ; elle représente l'équation centrale du modèle de Solow-Swan model. Elle stipule que le taux de variation du stock de capital par unités effectives de travail est la différence entre deux termes :

- sk^α, qui mesure l'*investissement courant* par unité de travail effectif. La production par unités de travail effectif est k^α et la fraction de cette production qui est investie est s.
- $(n+\gamma+\delta)k$, qui mesure l'*investissement requis*, c'est-à-dire, le montant d'investissement qui doit être entrepris pour conserver k à son niveau.

Il y a deux raisons pour lesquelles un certain montant d'investissement est requis pour empêcher k de baisser.

- Le stock existant de capital se déprécie, ce capital doit être remplacé pour empêcher le stock de capital de baisser. Ceci est mesuré par le terme δk dans l'équation (15).
- La quantité de travail effectif est croissante. Par conséquent, investir juste assez pour conserver le stock de capital, K, constant n'est pas suffisant pour maintenir le capital par unité de travail effectif, k, constant. Au contraire, comme la quantité de travail effectif est croissante au taux $n + \gamma$, le stock de capital doit croître au taux $n + \gamma$ pour maintenir k constant. Ceci est le terme $(n + \gamma)k$ dans l' équation (15).

L'équation (15) indique donc que le ratio capital/travail effectif augmente à un taux proportionnel à la différence entre l'investissement courant et l'investissement requis.

- Quand l'investissement courant est supérieur à l'investissement requis, de sorte que $sk^{\alpha} > (n+\gamma+\delta)k$, k augmente.
- Quand l'investissement courant baisse et se fixe en dessous de l'investissement requis, k baisse.
- Quand les deux termes sont égaux, k est constant.

La figure 11.2 complète la figure 11.1 et représente les deux termes de l'expression pour $\dot{k}$ fonction de k. L'investissement requis, $(n+\gamma+\delta)k$, est proportionnel à k et est représenté par une *ligne droite* ayant une pente positive. L'investissement courant est une *courbe concave* car c'est une fraction de la production par unités de travail effectif et comme on l'a montré plus tôt, $\alpha k^{\alpha-1} > 0$, $-(1-\alpha)\alpha k^{\alpha-2} < 0$.

A $k = 0$, $y = 0$ et l'investisement courant et l'investissement requis sont égaux. Montrer que cette égalité se produit uniquement que pour $k > 0$ s'effectue en trois étapes :

- La première condition de Inada dans (6) implique que pour k légèrement supérieur à 0, la productivité marginale du capital $\alpha k^{\alpha-1}$ est forte, et donc la courbe sk^{α} est plus raide que la ligne $(n+\gamma+\delta)k$. Par conséquent, pour des valeurs positives mais petites de k, l'investissement courant est plus important que l'investissement requis.
- La deuxième condition de Inada condition dans (6) implique que $\alpha k^{\alpha-1}$ baisse à falls zéro qiuand k devient important. A un certain point, la pente de la ligne d'investissement courant baisse en dessous de la pente de la ligne d'investissement requis. Avec la courbe sk^{α} plus plate que la ligne $(n+\gamma+\delta)k$, les deux doivent éventuellement se couper[8].
- Le fait que $-(1-\alpha)\alpha k^{\alpha-2} < 0$ implique que les deux courbes se couperont *seulement quand* $k > 0$, à la valeur unique de k pour laquelle l'investissement courant égale l'investissement requis.

[8] Clairement, s'il n'y a pas une série de valeurs de k pour laquelle la courbe sk^{α} est au dessus de la ligne $(n+\gamma+\delta)k$, les deux courbes ne peuvent pas se couper et il n'y a pas d'équilibre.

Désignons par $\tilde{k}$ cette valeur unique qui est le *point d'équilibre* du système, elle est déterminée en fixant $\dot{k} = 0$ dans l'équation (15) et est implicitement définie par

$$s\tilde{k}^{\alpha} - (n + \gamma + \delta)\tilde{k} = 0, \tag{16}$$

dont la solution est donnée par

$$\tilde{k} = \left\{ \frac{s}{n + \gamma + \delta} \right\}^{1/(1-\alpha)}. \tag{17}$$

Cette équation implique qu'en particulier $\partial\tilde{k}/\partial s > 0$. Une hausse du taux d'épargne augmente le ratio d'équilibre capital/travail effectif.

La figure 11.3 montre le **diagramme en phase** liant $\dot{k}$ à k.

- Si initialement $k < \tilde{k}$, l'investissement courant est supérieur à l'investissement requis et donc $\dot{k}$ est positif, c'est-à-dire, k augmente.
- Si initialement $k > \tilde{k}$, $\dot{k}$ est négatif et k baisse.
- Si initialement $k = \tilde{k}$, $\dot{k}$ est nul.

Par conséquent, quel que soit le niveau où le stock initial de l'économie se trouve (dès lors qu'il est positif), il converge vers $\tilde{k}$, le point auquel la ligne du diagramme en phase coupe l'axe horizontal[9]. Le processus dynamique décrit par l'équation (15) est donc **globalement stable**. Le sentier dynamique explicite de k est dévrivé dans l'appendice de ce chapitre.

A l'équilibre stationnaire, avec k constant à $\tilde{k}$, le stock de capital, qui par définition est égale à ALk, augmente au taux

$$\tilde{\mathbf{g}}_K = \left.\frac{\dot{K}}{K}\right|_{k=\tilde{k}} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} = n + \gamma, \tag{18}$$

qui est aussi le taux de croissance de la main-d'oeuvre effective AL.

La production est donnée par ALy. Son taux de croissance à l'état stationnaire, $\tilde{\mathbf{g}}_Y$, est donc

$$\tilde{\mathbf{g}}_Y = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} = n + \gamma, \tag{19}$$

[9] Si initialement k et nul, il demeurera à ce niveau. Cette possibilité est ignorée dans ce qui suit.

parce que y est constant et fixé à $\tilde{k}^{\alpha}$, alors $\dot{y}/y|_{k=\tilde{k}} = 0$. Par conséquent, la production est aussi croissante au même taux que le capital et le travail effectif.

Des résultats ci-dessus, les taux de croissance du capital par travailleur et de la production par travailleur (c'est-à-dire, la productivité du travail) sont donnés par

$$\tilde{\mathbf{g}}_{K/L} = \tilde{\mathbf{g}}_K - \frac{\dot{L}}{L} = \gamma, \quad \tilde{\mathbf{g}}_{Y/L} = \tilde{\mathbf{g}}_Y - \frac{\dot{L}}{L} = \gamma. \tag{20}$$

Par conséquent, le modèle Solow-Swan implique que quel que soit le point de départ, l'économie converge vers un **sentier de croissance équilibrée**, une situation où chaque variable du modèle croît à un taux constant. Au sentier de croissance équilibrée, le taux de croissance de la production par travailleur est déterminé uniquement par le taux de croissance du progrès technologique. En particulier, cela ne dépend ni du taux d'épargne ni de la forme spécifique de la fonction de production.

Par définition, si les marchés sont concurrentiels, le **taux de rendement du capital**, r, doit être égal à son produit marginal, $\alpha k^{\alpha-1}$, moins la dépréciation, δ :

$$r = \alpha k^{\alpha-1} - \delta,$$

alors que le *taux de salaire*, w, est donné par

$$w = \frac{\partial}{\partial L}(ALk^{\alpha}) = (1-\alpha)Ak^{\alpha}.$$

Par conséquent, sur le sentier de croissance équilibrée, le taux de rendement du capital (ou le taux d'intérêt réel net) est constant, et le salaire réel augmente au taux γ. En utilisant les résultats ci-dessus, les *parts relatives du capital et du travail* données par

$$\frac{(r+\delta)K}{Y} = \frac{(r+\delta)k}{y} = \frac{\alpha k^{\alpha-1}k}{k^{\alpha}} = \alpha,$$

$$\frac{wL}{Y} = \frac{w}{Y/L} = \frac{w}{Ay} = \frac{(1-\alpha)Ak^{\alpha}}{Ak^{\alpha}} = 1-\alpha,$$

sont aussi constantes le long du sentier de croissance équilibrée.

3 Une digression sur les trappes de revenu faible

La discussion précédente a fait l'hypothèse que le taux de croissance de la population, n, est exogène [Equation (7)]. Supposons, pour un moment, que le taux de croissance de la population soit *endogène* et lié de façon *non-linéaire* au ratio capital/travail effectif. Comme l'ont montré les premières contributions de Buttrick (1958) et Nelson (1956), dans de telles conditions, le modèle de Solow-Swan peut entraîner un niveau de revenu par tête faible **dynamiquement stable**[10].

Formellement, supposons que $n = n(k)$; l'équation dynamique de base du modèle Solow-Swan, l'équation (15), devient

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - [n(k) + \gamma + \delta]k.$$

Supposons spécifiquement que la fonction $n(k)$ est telle que le taux de croissance de la population est

- *négatif* à des niveaux faibles des ratios capital/travail effectif car la population est incapable de satisfaire ses besoins primaires ;
- *positif* à des valeurs intermédiaires de k (et donc le taux de salaire réel) ;
- encore *négatif* à des valeutrs plus élevées de k.

Un tel scénario peut être très plausible dans les pays en développement. Une fonction $n(k)$ qui satisfait ces conditions est illustrée à la partie supérieure de la figure 11.4, qui est tirée de Burmeister et Dobell (1970). Comme le montre la partie inférieure de la figure, la non-linéarité de $n(k)$ implique que des **équilibres multiples** (certains instables) peuvent survenir[11]. En particulier, la figure illustre la possibilité d'un **niveau de trappe faible** (point E) auquel pour des petites variations de k, les effets de population

[10] Becker, Murphy et Tamura (1990) fournissent un traitement plus moderne de cette idée en endogénéisant les *taux de fertilité*.

[11] Burmeister et Dobell (1970, pp. 36-38) analysent la croisasnce endogène du travail dans le modèle de base de Solow-Swan en liant les taux de participation au salaire courant. Comme on l'analyse plus loin, cette extension n'affecte pas les propriétés qualitatives du modèle, elle n'affecte que la *vitesse de convergence* vers le sentier de croisance équilibré.

empêchent toute augmentation du ratio capital/travail effectif et force un retour vers l'équilibre stable, $\tilde{k}_S$. Cependant, une **forte poussée**, prenant par exemple, la forme d'une augmentation exogène du taux d'épargne, augmenterait le ratio capital/travail effectif au delà du point d'équilibre élevé et instable $\tilde{k}_U$, et fixerait l'économie sur le sentier de croissance du capital et du revenu par tête. Cette possibilité a été soulignée par Rosenstein-Rodan (1961) ; une reformulation moderne de ce point de vue a été offerte par Murphy, Shleifer et Vishny (1989).

4 Population, épargne et production d'état-stationnaire

Revenons maintenant au cas où le taux de croissance de la force de travail est vraiment exogène et considérons les effets d'une variation de n et une variation du taux d'épargne, s.

Supposons que la position initiale de l'économie est sur le sentier de croissance équilibrée et faisons d'abord l'hypothèse que le taux de croissance de la population baisse à $t = 0$, de n_H à n_L. La figure 11.5 illustre les effets de ce changement. Le point mort de la ligne d'investissement se déplace vers le bas ; en termes d'impact, avec k donné à $k_0 = \tilde{k}_H$, la baisse de l'investissement requis par rapport à l'investissement courant (de la quantité EA) implique que $\dot{k}_0 > 0$. Par conséquent, k commence à augmenter et poursuit son augmentation jusqu'à atteindre le nouvel état stationnaire qui est caractérisé par un stock de capital par travailleur plus élevé ($\tilde{k}_L > \tilde{k}_H$). La production par travailleur qui est égale à $A\tilde{k}^{\alpha}$, est donc aussi plus élevée au nouvel état stationnaire. Cet effet positif à long terme peut être vérifié directement à partir de l'équation (17). Cependant, le taux de croissance de toutes les variables mesurées par tête n'est pas affecté à long terme ; bien que la réduction de n soit *permanente*, l'augmentation du taux de croissance de la production par travailleur n'est que *transitoire*. A long terme, Y/L croît au même taux γ.

Supposons maintenant que le taux d'épargne, s, augmente, en raison par exemple d'une envie soudaine d'épargne. La hausse de s (de s_L à s_H) déplace la courbe d'investissement courant, sk^{α} comme illustré à la figure 11.6. Le stock de capital à l'état stationnaire augmente de $\tilde{k}_L$ à $\tilde{k}_H$. Au niveau initial de k, l'investissement courant est supérieur à l'investissement requis (de la quantité EA) et donc $\dot{k}_0 > 0$; k commence à augmenter et continue d'augmenter jusqu'à ce que le nouvel équilibre d'état stationnaire $\tilde{k}_H$ soit atteint. Par conséquent, une hausse du taux d'épargne augmente le ratio capital/travail effectif à long terme comme on peut encore le remarquer à partir de l'équation (17).

La production par travailleur, Y/L, est égale à Ak^α. Quand k est constant, Y/L croît au taux γ, comme on l'a montré précédement. Pendant la transition de $\tilde{k}_L$ à $\tilde{k}_H$, avec k augmentant, le taux de croissance de Y/L sera supérieur à γ. Par conséquent, une augmentation *permanente* du taux d'épargne n'entraîne qu'une augmentation *transitoire* du taux de croissance de la production par travailleur. En outre, la hausse du taux d'épargne *n'a pas d'effet à long terme* sur le taux de croissance de la production et le stock de capital.

Comme on l'a montré plus tôt [Equation (13)], la consommation par unité de travail effectif, c, est donnée initialement par :

$$c = (1 - s_L)k^\alpha. \tag{21}$$

Par définition, k ne peut pas varier de façon discrète. Par conséquent la hausse de s de s_L à s_H implique que la consommation chute. Après une baisse initiale, la consommation augmente graduellement à mesure que k augmente et s demeure à s_H.

Pour établir si la consommation par unité de travail effectif augmente ou baisse à long terme par rapport à son niveau initial, notons que sur le sentier de croissance équilibrée, $\tilde{c}$ est donné par la différence entre la production et l'investissement courant.

$$\tilde{c} = \tilde{k}^\alpha - s\tilde{k}^\alpha, \tag{22}$$

qui est donné à la figure 11.2 par la distance EA. Comme le montre l'équation (16), sur le sentier de croissance équilibrée, l'investissement courant, $s\tilde{k}^\alpha$, est aussi égal à l'investissement requis. En substituant l'équation (16) dans (22), il en résulte que

$$\tilde{c} = \tilde{k}^\alpha - (n + \delta + \gamma)\tilde{k},$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} = [\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} - (n + \gamma + \delta)]\frac{\partial \tilde{k}}{\partial s} \gtrless 0.$$

Parce que $\partial\tilde{k}/\partial s > 0$, le signe de $\partial\tilde{c}/\partial s$ dépend du fait que le produit marginal du capital, $\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}$, soit supérieur ou inférieur à $n + \gamma + \delta$.

- Si $\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}$ est *inférieur* à $n+\gamma+\delta$, alors la production additionnelle, provenant du capital augmenté, n'est pas suffisante pour maintenir le stock de capital à son niveau plus élevé. Dans ce cas, la consommation doit baisser pour maintenir le niveau plus élevé du stock de capital.

- Si $\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}$ est *supérieur* à $n+\gamma+\delta$, il y a plus qu'assez de production additionnelle pour maintenir k à son niveau plus élevé, par conséquent la consommation augmente[12].

Etablir l'effet d'une augmentation du taux d'épargne sur la valeur à long terme de la production par unité de travail effectif est un peu compliqué. Comme dérivé à l'appendice, l'élasticité de long terme de y par rapport à s, η, est donnée par

$$\eta = \frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{23}$$

Supposons que α, la part du revenu payé au capital est d'à peu près 0,3, une valeur qui semble être largement compatible avec l'évidence dans les pays en développement. En substituant cette valeur dans l'expression ci-dessus, il en résulte

$$\eta = \frac{0,3}{1-0,3} \simeq 0,43.$$

Ce résultat implique que, par exemple, une augmentation de 10% du taux d'épargne (disons de 10% de la production à 11%) augmente la production par unité de travail effectif de seulement 4,3% à long terme par rapport à son niveau initial. Même une augmentation de 50% de s (disons de 10% à 15%) n'augmenterait $\tilde{y}$ que de seulement à peu près 21%. Par conséquent, des fortes variations des taux d'épargne n'ont que des *effets modérés* sur le niveau de la production sur le sentier de croissance équilibrée.

Intuitivement, une petite valeur de α affaiblit l'impact de l'épargne sur la production pour deux raisons (Romer, 1995, p. 21) :

- une petite valeur de α signifie que l'impact d'une variation de $\tilde{k}$ sur $\tilde{y}$ est faible ;

[12] La valeur de $\tilde{k}$ pour laquelle une augmentation du taux d'épargne n'a pas d'effet sur la consomation ($\partial\tilde{c}/\partial s = 0$) est connue comme étant le niveau de la *règle d'or* du stock de capital. La consommation est à son niveau maximum possible parmi les sentiers de croissance équilibrée. La règle d'or de la croissance équilibrée est définie comme le point où le produit marginal du capital est égal au taux de croissance économique. Voir Barro et Sala-i-Martin (1995).

- elle implique que la courbe d'investissement courant, sk^α, se penche fortement ; par conséquent, un déplacement de la courbe vers le haut déplace relativement peu son intersection avec la ligne d'investissement requis. Par conséquent, l'impact d'une variation de s sur $\tilde{k}$ est faible.

5 La vitesse d'ajustement

La discussion précédente s'est focalisée sur les effets de *long terme* des variations du taux de croissance de la population et du taux d'épargne ; en pratique, il est aussi important d'évaluer la *vitesse* à laquelle l'ajustement au nouvel équilibre, c'est-à-dire à quelle vitesse k approche $\tilde{k}$.

Considérons d'abord le comportement du stock de capital par unité de travail effectif. Comme on le montre à l'appendice de ce chapitre, les variations de k aux environs du sentier de croissance équilibrée peuvent être approximées par :

$$\dot{k} \simeq \Lambda(k - \tilde{k}), \tag{24}$$

où

$$\Lambda = -(1-\alpha)(n+\gamma+\delta) < 0.$$

L'équation (24) indique que (au voisinage du sentier de croissance équilibrée), le capital par unité de travail effectif évolue vers son niveau d'état stationnaire à une *vitesse proportionnelle à sa distance* de $\tilde{k}$, avec un coefficient de proportionnalité Λ.

L'équation (24) est une *équation différentielle non-homogène de premier ordre* dont la solution, dérivée par exemple dans Chiang (1984, pp. 472-474), est donnée par :

$$k - \tilde{k} \simeq e^{\Lambda t}(k_0 - \tilde{k}),$$

où k_0 dénote la valeur initiale de k. Comme on le montre dans l'appendice, y approche $\tilde{y}$ au même taux auquel k approche $\tilde{k}$:

$$y - \tilde{y} \simeq e^{\Lambda t}(y_0 - \tilde{y}). \tag{25}$$

L'équation (25) peut être utilisée pour évaluer la vitesse à laquelle une économie du type Solow-Swan s'approche de son sentier de croissance équilibrée. Spécifiquement, $|\Lambda|$ dans l'équation ci-dessus mesure la **vitesse d'ajustement** de la production par travailleur, c'est-à-dire, le taux auquel l'économie rattrape son niveau d'état stationnaire de y, étant donné une certaine position initiale y_0. Autrement dit, l'équation (25) indique que $|\Lambda| \cdot 100\%$ de l'écart initial entre le niveau courant de la production par travailleur et son niveau d'état stationnaire est comblé chaque année. En particulier, la vitesse d'ajustement est une fonction décroissante de la part du capital, α.

Supposons par exemple, que le taux de croissance annuel de la force de travail, n, est de 2%, le progrès technique γ croît au taux annuel de 2% et le taux annuel de dépréciation du stock de capital δ, est de 4% (qui implique que le capital dure en moyenne 25 ans). Supposons encore que la part du capital dans la production est d'à peu près 0,3. Par conséquent,

$$\Lambda = -(1 - 0,3)(0,02 + 0,02 + 0,04) \simeq -0,056,$$

c'est-à-dire, la production par travailleur (ainsi que le ratio capital/travail effectif) fait déplacer, chaque années, à peu près 6% de la distance restante vers sa valeur d'équilibre de long terme $\tilde{y}$. Supposons que le **ratio d'ajustement**, μ, soit défini comme la fraction de la variation de y_0 à $\tilde{y}$ réalisée après t années :

$$\mu = \frac{y - y_0}{\tilde{y} - y_0}.$$

En utilisant (25), cette équation peut être réécrite comme suit :

$$\mu = \frac{(y - \tilde{y}) + (\tilde{y} - y_0)}{\tilde{y} - y_0} = 1 - e^{\Lambda t},$$

ou de façon équivalente

$$e^{\Lambda t} = 1 - \mu. \tag{26}$$

Le temps mis pour réaliser une fraction μ donnée d'ajustement de y_0 à $\tilde{y}$ est donc donné par[13] :

$$t^* = \ln(1 - \mu)/\Lambda \simeq -\mu/\Lambda, \tag{27}$$

où le dernier résultat est obtenu en utilisant l'approximation $\ln(1 + x) \simeq x$, pour x assez faible. Par exemple, calculer la durée moyenne (half-life) du processus – le temps nécesaire pour éliminer la moitié de la déviation initiale de y de sa valeur d'état sationnaire – requiert de fixer $\mu = 0,5$. Etant donné la valeur de Λ calculée plus tôt, l'équation (27) donne

[13] L'équation (26) peut aussi être utilisée pour calculer le pourcentage μ^* de la valeur réalisée à l'état stationnaire pour un taux de convergence donné après t années dans la mesure où $1 - e^{-\Lambda t} \simeq -\Lambda t$.

$$t^* = -0,69/(-0,056) \simeq 12,4,$$

c'est-à-dire qu'il faut approximativement 12 années pour atteindre la moitié du chemin vers l'état stationnaire $\tilde{y}$. Le Tableau 11.1 fournit une série plus complète de résultats numériques pour $\delta = 0,04$. En particulier, pour $\alpha = 0,3$, $n = 0,01$ et $\gamma = 0,02$, la vitesse d'ajustement est de 4,9% et il faut 32,8 années pour réaliser 80% de l'ajustement de y_0 à $\tilde{y}$. Par conséquent, comme l'a souligné très tôt Sato (1963), atteindre l'équilibre d'état stationnaire dans le modèle de Solow-Swan peut être un processus assez long.

Tableau 11.1
Le modèle de Solow-Swan : Années d'ajustement

		$\alpha = 0.3$		$\alpha = 0.4$	
γ	μ	$n = 1\%$	$n = 2\%$	$n = 1\%$	$n = 2\%$
		$\lvert\Lambda\rvert = 4,2\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 4,9\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 3,6\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 4,2\%$
	0,2	5,3	4,6	6,2	5,3
0,01	0,5	16,5	14,1	19,3	16,5
	0,8	38,3	32,8	44,7	38,3
		$\lvert\Lambda\rvert = 4,9\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 5,6\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 4,2\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 4,8\%$
	0,2	4,6	4,0	5,3	4,6
0,02	0,5	14,1	12,4	16,5	14,4
	0,8	32,8	28,7	38,3	33,5
		$\lvert\Lambda\rvert = 5,6\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 6,3\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 4,8\%$	$\lvert\Lambda\rvert = 5,4\%$
	0,2	4,0	3,5	4,6	4,1
0,03	0,5	12,4	11,0	14,4	12,8
	0,8	28,7	25,5	33,5	29,8

Note : Ces résultats font l'hypothèse que le taux de dépréciation du stock de capital est de 4%.

Source : Calculs de l'auteur.

L'implication de ces résultats est aussi que les changements de politique économique dans le modèle peuvent être associés à des périodes d'ajustement très longues. Supposons en effet que $|\Lambda| = 0,056$. Dans l'exemple précédent d'une augmentation de 10% du taux d'épargne, la production par travailleur est de $0,056(5\%) = 0,28\%$ au-dessus de son sentier précédent après une année ; $0,5(5\%) = 2,5\%$ au dessus après à peu près 12 années et approche asymptôtiquement 5% au dessus de son sentier initial. Par conséquent, non seulement l'impact global d'une variation substantielle du taux d'épargne est modeste mais en plus il n'apparaît pas très rapidement.

Une procédure similaire à celle décrite ci-dessus peut être utilisée pour étudier la vitesse d'ajustement du *taux de croissance* de la production, contrairement à son *niveau,* vers sa valeur d'état stationnaire. Pour cela, notons d'abord que la solution à l'équation (24) peut être écrite comme suit :

$$k = \tilde{k} + \eta e^{\Lambda t},$$

où η est une **constante d'intégration**. En remettant ce résultat dans l'équation (24), il en résulte

$$\dot{k}/k = \Lambda \left\{ 1 - \frac{\tilde{k}}{\tilde{k} + \eta e^{\Lambda t}} \right\}. \tag{28}$$

Parce que la production est égale à $Y = ALk^{\alpha}$, le taux de croissance courant de la production est égal :

$$\mathbf{g}_Y \equiv \dot{Y}/Y = \alpha \dot{k}/k + n + \gamma = \alpha \dot{k}/k + \tilde{\mathbf{g}}_Y, \tag{29}$$

où, comme on l'a montré plus tôt, [Equation (19)], $_{Y} = n + \gamma$.

En substituant l'équation (28) dans (29), il en résulte

$$\mathbf{g}_Y = \alpha\Lambda \left\{ 1 - \frac{\tilde{k}}{\tilde{k} + \eta e^{\Lambda t}} \right\} + \tilde{\mathbf{g}}_Y. \tag{30}$$

En fixant $t = 0$ dans cette équation, cela implique que

$$\alpha\Lambda \left\{ 1 - \frac{\tilde{k}}{\tilde{k} + \eta} \right\} = \mathbf{g}_Y^0 - \tilde{\mathbf{g}}_Y,$$

où $\mathbf{g}_Y^0$ est donné par la condition initiale. En résolvant cette équation par rapport au terme constant η,il en résulte :

$$\eta = \frac{(\mathbf{g}_Y^0 - \tilde{\mathbf{g}}_Y)\tilde{k}}{\tilde{\mathbf{g}}_Y - \mathbf{g}_Y^0 + \alpha\Lambda},$$

qui peut être remis dans l'équation (30) pour donner

$$\mathbf{g}_Y = \alpha\Lambda \left\{ 1 - \tilde{k} \left[\tilde{k} + \frac{(\mathbf{g}_Y^0 - \tilde{\mathbf{g}}_Y)\tilde{k}e^{\Lambda t}}{\tilde{\mathbf{g}}_Y - \mathbf{g}_Y^0 + \alpha\Lambda} \right]^{-1} \right\} + \tilde{\mathbf{g}}_Y. \tag{31}$$

Le **ratio d'ajustement** peut maintenant être défini comme étant :

$$\mu = \frac{\mathbf{g}_Y - \mathbf{g}_Y^0}{\tilde{\mathbf{g}}_Y - \mathbf{g}_Y^0}. \tag{32}$$

En remplaçant l'équation (31) dans (32) et en résolvant par rapport au temps t^* (en années) requis pour obtenir une fraction λ du chemin de $\mathbf{g}_Y^0$ à $\tilde{\mathbf{g}}_Y$ donne

$$t^* = \Lambda^{-1} \ln \left\{ \frac{(1-\mu)(\tilde{\mathbf{g}}_Y - \mathbf{g}_Y^0 + \alpha\Lambda)}{(1-\mu)(\tilde{\mathbf{g}}_Y - \mathbf{g}_Y^0) + \alpha\Lambda} \right\}.$$

6 Prédictions du modèle et faits empiriques

Les prédictions du modèle de Solow-Swan concernant le comportement à long terme de la production, de la consommation et de l'investissement et les réponses de ces variables aux variations du taux de croissance de la population et du taux d'épargne sont les suivantes :

- Le ratio capital/travail effectif, le produit marginal du capital et la production par unités de travail effectif sont constantes sur le sentier de croissance équilibrée.

- Les taux de croissance d'état stationnaire du capital par travailleur K/L et de la production par travailleur Y/L ne sont déterminés que par le taux de progrès technique. En particulier, aucune variable ne dépend ni du taux d'épargne ni d'une forme spécifique de la fonction de production.

- La production, le stock de capital et le travail effectif toutes croissent au même taux, donné par la somme du taux de croissance de la force de travail et le taux de croissance du progrès technique.

- Une baisse du taux de croissance de la population augmente les niveaux d'état stationnaire du ratio capital/travail effectif et de la production en unités d'efficience et réduit le taux de croissance de la production, le stock de capital et le travail effectif.

- Une augmentation du taux d'épargne augmente aussi le ratio capital/travail effectif et la production en unités d'efficience à long terme, mais n'a pas d'effet sur les taux de croissance de la production à l'état stationnaire, du stock de capital et du travail effectif.

Comment ces prédictions sont-elles compatibles avec les évidences empiriques sur la croissance et les faits stylisés décrits au chapitre précédent? D'abord, les évidences empiriques sur les *pays industrialisés* suggèrent qu'il est raisonnable d'affirmer, en première approximation, que les taux de croissance du travail, du capital et de la production sont chacun globalement constants (Romer, 1989). Les taux de croissance de la production et du capital sont à peu près égaux (de sorte que le ratio capital/production est approximativement constant) et sont plus importants que le taux de croissance du travail ; par conséquent, la production par travailleur et le capital par travailleur sont croissants dans le temps. Cependant, les évidences limitées, disponibles pour les pays en développement, n'autorisent pas une généralisation.

En second lieu, les prédictions du modèle concernant les effets des variations de la croissance de la population et du taux d'épargne sur le *niveau* du revenu (ou les niveaux de vie) sont aussi compatibles avec les évidences empiriques. La partie supérieure de la figure 10.2 a en effet, montré comme l'a prédit le modèle, que les taux de croissance plus faibles de la population tendent à être associés aux niveaux plus élevés des revenus par tête[14]. De façon similaire, la partie supérieure de la figure 10.3 a montré que le taux d'épargne est associé positivement au niveau du revenu par tête.

Cependant, il y a plusieurs faits stylisés que le modèle ne peut expliquer. D'abord comme on l'a analysé au chapitre précédent et comme on l'a montré dans les parties inférieures des figures 10.3 et 10.4, le *taux d'épargne* et la *part de l'investissement dans la production* sont positivement corrélées (sur une période de temps suffisamment longue) au taux de croissance du revenu par tête (ou approximativement la production par travailleur). Les variations de l'accumulation du capital physique expliquent une part significative des différences de croissance économique entre pays (Voir chapitre 13). Au contraire, le modèle de Solow-Swan ne prédit *pas d'association* entre ces variables à l'état stationnaire.

[14]On devrait noter qu'un test plus approprié de l'effet du revenu par tête sur les décisions individuelles est de regarder les *taux de fertilité*, qui corrigent la structure par âge de la population et retirent les effets de la mortalité et de la migration.

En deuxième lieu, les différences de *capital physique par travailleur* ne peuvent pas expliquer les différences observées de la production par travailleur (ou revenu par tête), du moins si la contribution du capital à la production est globalement reflétée par ses rendements privés. Spécifiquement, deux difficultés surviennent :

- Les différences en capital requises sont *de loin trop importantes*. Par exemple, la productoin par travailleur aux Etats-Unis aujourd'hui est de l'ordre de *dix fois supérieure* à celle de l'Inde aujoud'hui. Avec une technologie de production du type Cobb-Douglas utilisée précedemment, la part du capital dans la production, α, est aussi l'élasticité de la production par rapport au stock de capital. Expliquer une différence de dix de la production par travailleur sur la base des différences en capital requiert une différence d'un facteur de $10^{1/\alpha}$ en capital par travailleur. Pour $\alpha = 0.3$, ceci est un facteur de mille. Même si $\alpha = 0.5$, une valeur supérieure à la plupart des estimations, on a encore besoin d'une différence d'un facteur de cent. Cependant, le capital par travailleur aux Etats-Unis n'est plus de vingt à trente fois supérieur à celui de l'Inde[15].

- Attribuer les différences de production aux différences en capital sans les différences d'efficacité du travail implique de fortes variations du taux de rendement du capital (Lucas (1990)).

Comme on l'a noté précédemment, le taux de rendement du capital, r, est égal à son produit marginal, $\alpha k^{\alpha-1}$, moins la dépréciation, δ. Parce que la fonction de production peut être écrite de la manière suivante $k = y^{1/\alpha}$, le produit marginal du capital est $\alpha y^{-(1-\alpha)/\alpha}$; ceci implique que l'élasticité du produit marginal par rapport à la production est $-(1-\alpha)/\alpha$. Si $\alpha = 0,3$, une *différence de dix* dans la production par travailleur provenant des différences de capital par travailleur implique donc une *différence de cent* du produit marginal (et du taux de rendement) du capital. Une fois encore, il n'y a

[15] Le même argument peut être présenté en termes des taux d'épargne, de croissance de la population etc., des variables qui déterminent le capital par travailleur. Par exemple, l'élasticité de $\tilde{y}$ par rapport à s est $\alpha/(1-\alpha)$; voir Eq. (23). Par conséquent, expliquer une différence d'un facteur de dix de la production par travailleur sur la base des différences de s requérerait une différence d'un facteur de cent de s si $\alpha = 0,3$ et une différence d'un facteur de dix si $\alpha = 0,5$. Les variations des taux d'épargne courants sont largement inférieures à celles-ci.

pas d'évidence de telles différences des taux de rendement entre les pays ; elles conduiraient à des flux massifs et soutenus de capitaux des pays riches vers les pays pauvres. En pratique, rien de cela n'a été observé en dépit des évidences du début des années 90 (Voir chapitre 6).

En troisième lieu (le plus important), la seule source de variation du taux de croissance de la production par travailleur (ou du revenu par tête) dans le modèle de Solow-Swan à long terme est le taux de croissance de l'efficacité du travail, γ. Mais le modèle est *incomplet* car le moteur de la croissance à long terme, le taux de croissance de l'efficacité du travail, est *exogène*[16]. L'efficacité du travail n'est plus seulement une variable composite englobant les facteurs autres que le travail et le capital qui affectent la production. Une grande partie de la recherche récente dans ce domaine s'est concentrée sur la définition de ce qu'est l'efficacité du travail et sur les raisons pour lesquelles elle varie au cours du temps dans le but de comprendre les différences entre pays des taux de croisasnce du revenu réel. Le chapitre suivant eximinera amplement plusieurs interprétations alternatives.

7 Résumé

Le modèle de croissance de Solow-Swan fait les prédictions suivantes :

- Le ratio capital/travail effectif, le produit marginal du capital et la production par unités de travail effectif sont *constants* sur le **sentier de croissance équilibrée**.

- Les taux de croissance à l'état stationnaire du capital par travailleur ne sont déterminés que par le progrès technique.

- La production, le stock de capital et le travail effectif croissent au *même taux* qui est la somme du taux de croissance de la force de travail et du taux de croissance du progrès technique.

[16] On devrait noter que, loin de l'état stationnaire, les fluctuations (au cours du temps ainsi que dans les pays) du taux de croissance de la production par travailleur peuvent résulter non seulement des différences du taux de croissance de l'efficacité du travail, A, mais aussi des différences du taux de croissance du capital par travailleur, K/L. Cependant, comme on l'a analysé précédemment, dans les cas les plus raisonables, l'impact des variations du capital par travailleur sur les taux de croissance de la production par travailleur est probabement modeste.

- Les variations du *taux de croissance de la population* et du *taux d'épargne* affectent les *niveaux* d'état stationnaire du ratio capital/travail effectif et de la production par travailleur mais n'ont *pas d'effet sur le taux de croissance d'état stationnaire* du revenu par tête.

- Si le taux de croissance de la population est lié de façon *non-linéaire* au ratio capital/travail effectif (ou revenu), le modèle de Solow-Swan peut entraîner un *niveau de revenu par tête d'état stationnaire faible et dynamiquement stable.*

Plusieurs de ces prédictions sont compatibles avec les évidences empiriques sur la croissance à long terme dans les pays industrialisés et en développement. Cependant, le modèle de base est l'objet de nombreuses limites.

- Il n'explique pas la corrélation positive entre les *taux d'épargne et d'investissement* et la *croissance* du revenu par tête dans les pays, comme on l'analysera au chapitre suivant.

- Les différences des niveaux de revenu par tête à long terme entre les pays ne peuvent résulter, dans le modèle, que des différences des ratios capital/travail effectif, qui à leur tour peuvent être différents entre les pays qu'en raison des différences des taux de croissance de la population, des taux du progrès technique et des taux d'épargne. Cependant, les différences de capital par travailleur observées sont *de loin plus faibles* que ceux désirées pour expliquer les différences de production par travailleur (ou revenu par tête) que montrent les données.

- Il fournit une description *incomplète* du processus de croissance car le moteur de la croissance à long terme, le taux de croissance de l'efficacité du travail, est *exogène.*

Appendice
Dynamique de k, effet de s sur la production et vitesse d'ajustement

Pour trouver le sentier dynamique explicite de k, notons que l'équation (15) peut être écrite comme suit :

$$\dot{k} + (n+\gamma+\delta)k = sk^{\alpha},$$

dont la forme particulière est connue sous le nom d'**équation de Bernoulli** (voir Chiang, 1984, p. 500). Supposons que $z = k^{1-\alpha}$, de sorte que $\dot{z} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k}$; de ces deux résultats,

$$k = zk^{\alpha}, \quad \dot{k} = \frac{\dot{z}k^{\alpha}}{1-\alpha},$$

de sorte que l'équation ci-dessus peut être écrite comme suit :

$$\dot{z} + (1-\alpha)(n+\gamma+\delta)z = (1-\alpha)s,$$

qui est une équation différentielle standard linéaire non-homogène en z, dont la solution est donc

$$z = \left\{ z_0 - \frac{s}{n+\gamma+\delta} \right\} e^{-(1-\alpha)(n+\gamma+\delta)t} + \frac{s}{n+\gamma+\delta}.$$

En remplaçant z, il en résulte

$$k^{1-\alpha} = \left\{ k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{n+\gamma+\delta} \right\} e^{-(1-\alpha)(n+\gamma+\delta)t} + \frac{s}{n+\gamma+\delta},$$

équation qui montre que parce que $(1-\alpha)(n+\gamma+\delta) > 0$, $k^{1-\alpha}$ tend vers $s/(n+\gamma+\delta)$, ou la solution $\tilde{k}$ donnée dans l'équation (17).

Pour établir l'effet d'une augmentation du taux d'épargne de la production par unités de travail effectif sur le sentier de croissance équilibrée, notons que parce que $\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$, on doit avoir

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial s} = \alpha \tilde{k}^{\alpha-1}\left(\frac{\partial \tilde{k}}{\partial s}\right). \tag{A1}$$

Comme on l'a montré plus haut, $\tilde{k}$ est déterminé par l'égalité entre l'investissement courant et requis [Equation (16)], c'est-à-dire,

$$s\tilde{k}^{\alpha} - (n+\gamma+\delta)\tilde{k} = 0. \tag{A2}$$

Une différentiation implicite de cette expression par rapport à s,donne

$$s\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}(\frac{\partial\tilde{k}}{\partial s}) + \tilde{k}^{\alpha} - (n+\gamma+\delta)\frac{\partial\tilde{k}}{\partial s} = 0,$$

qui peut être réangencé comme suit :

$$\frac{\partial\tilde{k}}{\partial s} = \frac{\tilde{k}^{\alpha}}{(n+\gamma+\delta) - s\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}}.$$

En remplaçant cette $\partial\tilde{k}/\partial s$ dans (A1), il en résulte que

$$\frac{\partial\tilde{y}}{\partial s} = \frac{\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}\tilde{k}^{\alpha}}{(n+\gamma+\delta) - s\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}}.$$

Pour interpréter cette expression, il est convenable d'utiliser l'équation (16) pour remplacer s et le convertir en une élasticité en multipliant les deux membres de l'équation par $s/\tilde{y}$.

Le résultat est le suivant :

$$\eta \equiv \frac{\partial\tilde{y}/\tilde{y}}{\partial s/s} = (\frac{s}{\tilde{k}^{\alpha}})\frac{\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}\tilde{k}^{\alpha}}{(n+\gamma+\delta) - s\alpha\tilde{k}^{\alpha-1}},$$

ou, en notant de (A2) que $s\tilde{k}^{\alpha-1} = (n+\gamma+\delta)$:

$$\eta = \frac{\alpha(n+\gamma+\delta)\tilde{k}^{\alpha}}{[(n+\gamma+\delta) - \alpha(n+\gamma+\delta)]\tilde{k}^{\alpha}},$$

expression qui peut être simplifiée pour donner l'équation (23) dans le texte.

Pour dériver l'équation (24), notons d'abord que de l'équation (15), $\dot{k}$ est une fonction de k ; cette relation peut être écrite comme suit :

$$\dot{k} = \Phi(k). \tag{A3}$$

Quand $k = \tilde{k}$, $\dot{k}$ est nul. Par conséquent, aux environs de l'équilibre de long terme ($k = \tilde{k}$), une **approximation de premier ordre du type de Taylor de** $\Phi(k)$ donne (voir Chiang, 1984, pp. 256-258) [17]:

$$\dot{k} \simeq \Phi(\tilde{k}) + \Phi'|_{k=\tilde{k}}\,(k-\tilde{k}),$$

[17] La vitesse d'ajustement dérivée de cette procédure ne fournit, en des termes stricts, une estimation fiable que dans un voisinage arbitrairement petit autour du sentier de croissance équilibrée. Pour le modèle de Solow-Swan avec des fonctions de production conventionnelles et pour des variations modérées des valeurs des paramètres (telle que la variation de s considérée plus tôt), les approximations de Taylor sont jugées fiables. Cependant, en général, les approximations de Taylor ne fournissent pas des estimations fiables pour des *variations finies*. Pour une analyse, voir Mulligan et Sala-i-Martin (1993).

ou parce que $\Phi(\tilde{k}) = 0$ quand $\dot{k}$ est nul (au voisinage de l'équilibre de long terme) :

$$\dot{k} \simeq \Phi'|_{k=\tilde{k}} (k - \tilde{k}), \tag{A4}$$

où $\Phi'|_{k=\tilde{k}}$ est la dérivée de premier ordre de $\dot{k}$ évaluée à $k = \tilde{k}$.

En différentiant l'équation (15) par rapport à k et en évaluant cette expression à $k = \tilde{k}$ donne

$$\Phi'|_{k=\tilde{k}} = s\alpha\tilde{k}^{\alpha-1} - (\gamma + n + \delta),$$

ou, en utilisant l'équation (16) pour remplacer s :

$$\Phi'|_{k=\tilde{k}} = \Lambda = -(1 - \alpha)(n + \gamma + \delta) < 0,$$

expression qui peut être remplacée dans (A4) pour donner l'équation (24).

Pour montrer que y approche $\tilde{y}$ au même taux que k approche $\tilde{k}$, notons d'abord que de l'équation (5), $\dot{y} = \alpha k^{\alpha-1}\dot{k}$; en utilisant (A3) et le fait que $k = y^{1/\alpha}$ donne

$$\dot{y} = \alpha k^{\alpha-1}\Phi(k) = \alpha y^{(\alpha-1)/\alpha}\Phi(y^{1/\alpha}) = \Gamma(y).$$

Parce que $\Gamma(\tilde{y}) = 0$, une *approximation linéaire* aux environs de $y = \tilde{y}$ donne maintenant,

$$\dot{y} = \Gamma'|_{y=\tilde{y}} (y - \tilde{y}),$$

où parce que $\Phi(\tilde{y}^{1/\alpha}) = 0$,

$$\Gamma'|_{y=\tilde{y}} = \alpha y^{(\alpha-1)/\alpha}\ \Phi'|_{y=\tilde{y}} = \alpha\tilde{y}^{(\alpha-1)/\alpha}[sy - (\gamma + n + \delta)y^{1/\alpha}]'_{y=\tilde{y}},$$

c'est-à-dire,

$$\Gamma'|_{y=\tilde{y}} = \alpha s\tilde{y}^{(\alpha-1)/\alpha} - (\gamma + n + \delta).$$

En utilisant l'équation (16), il en résulte que $s = (\gamma + n + \delta)\tilde{y}^{1/\alpha}/\tilde{y}$, expression qui peut être substituée dans l'expression ci-dessus pour donner $\Gamma'|_{y=\tilde{y}} = \Lambda$.

Figure 11.1
La fonction de production dans le modèle de Solow-Swan

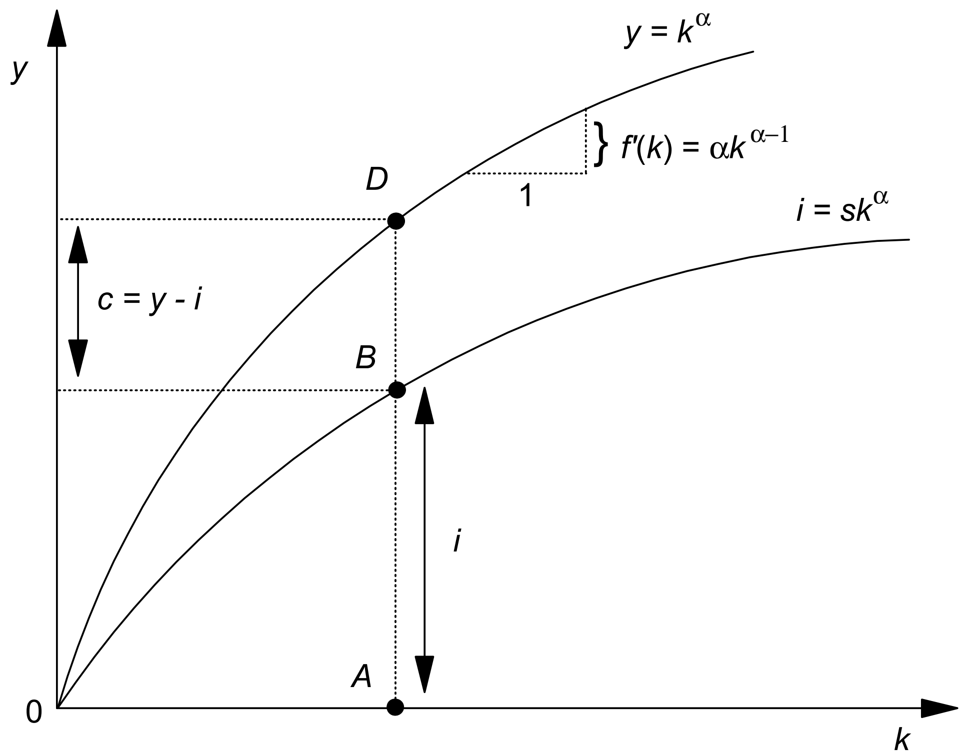


Figure 11.2
Le ratio d'équilibre capital/travail

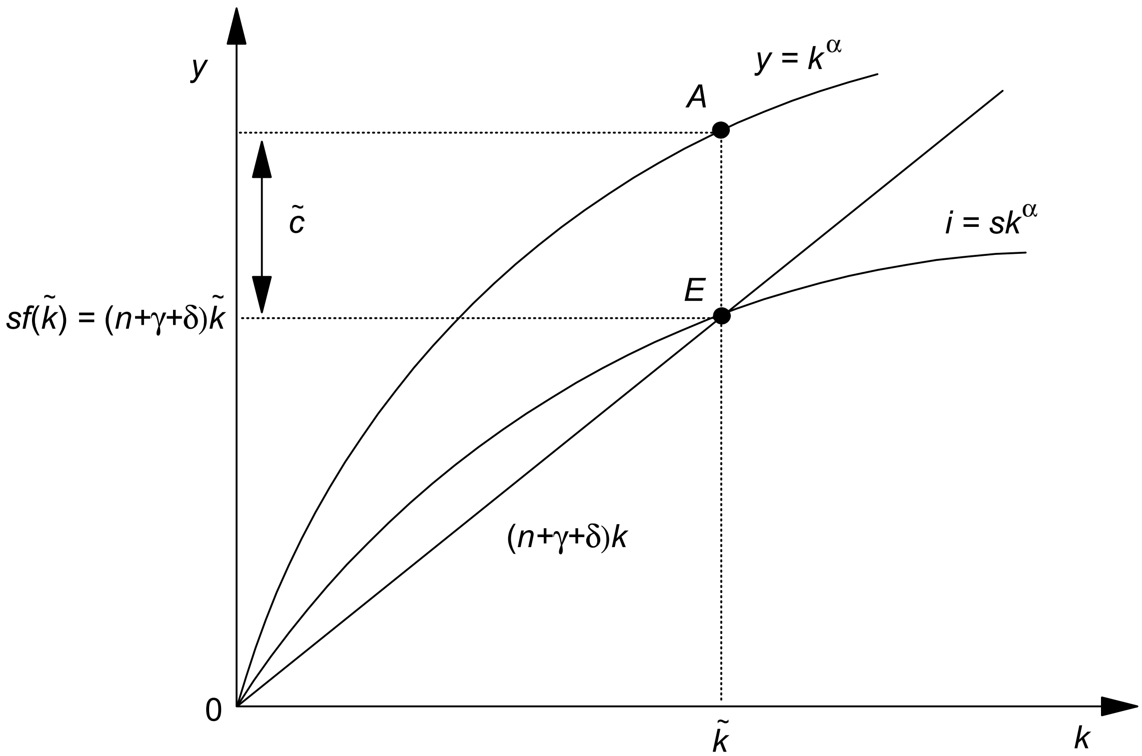


Figure 11.3
Processus d'ajustement du ratio capital/travail

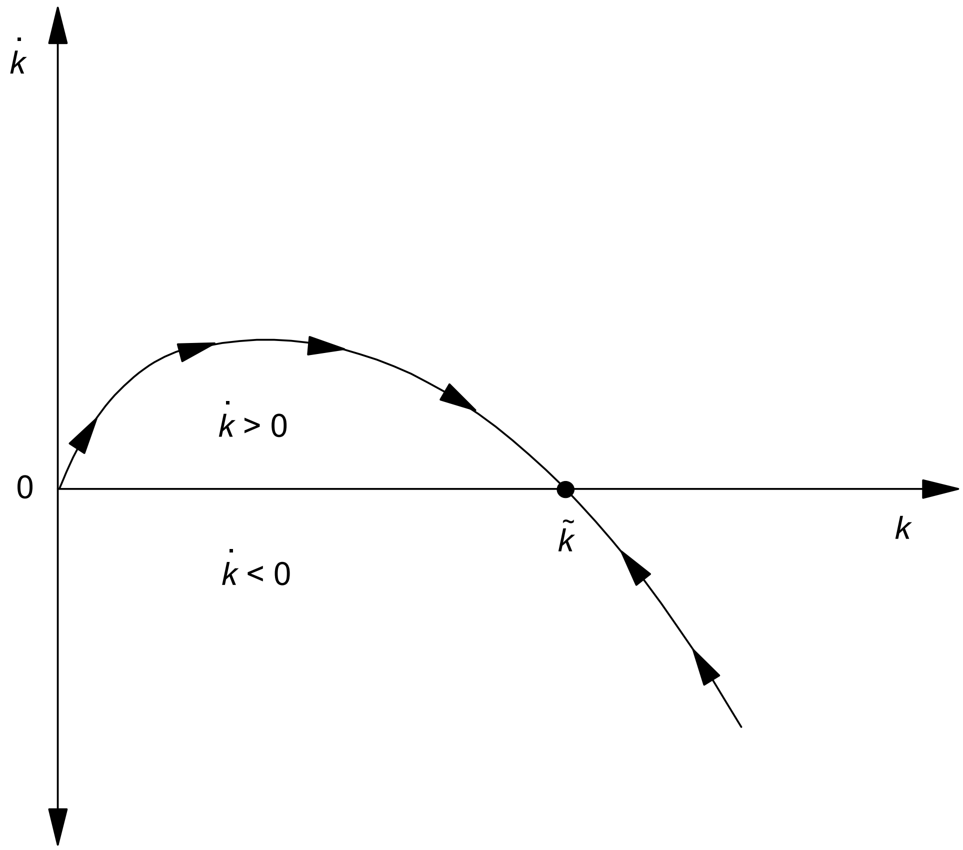
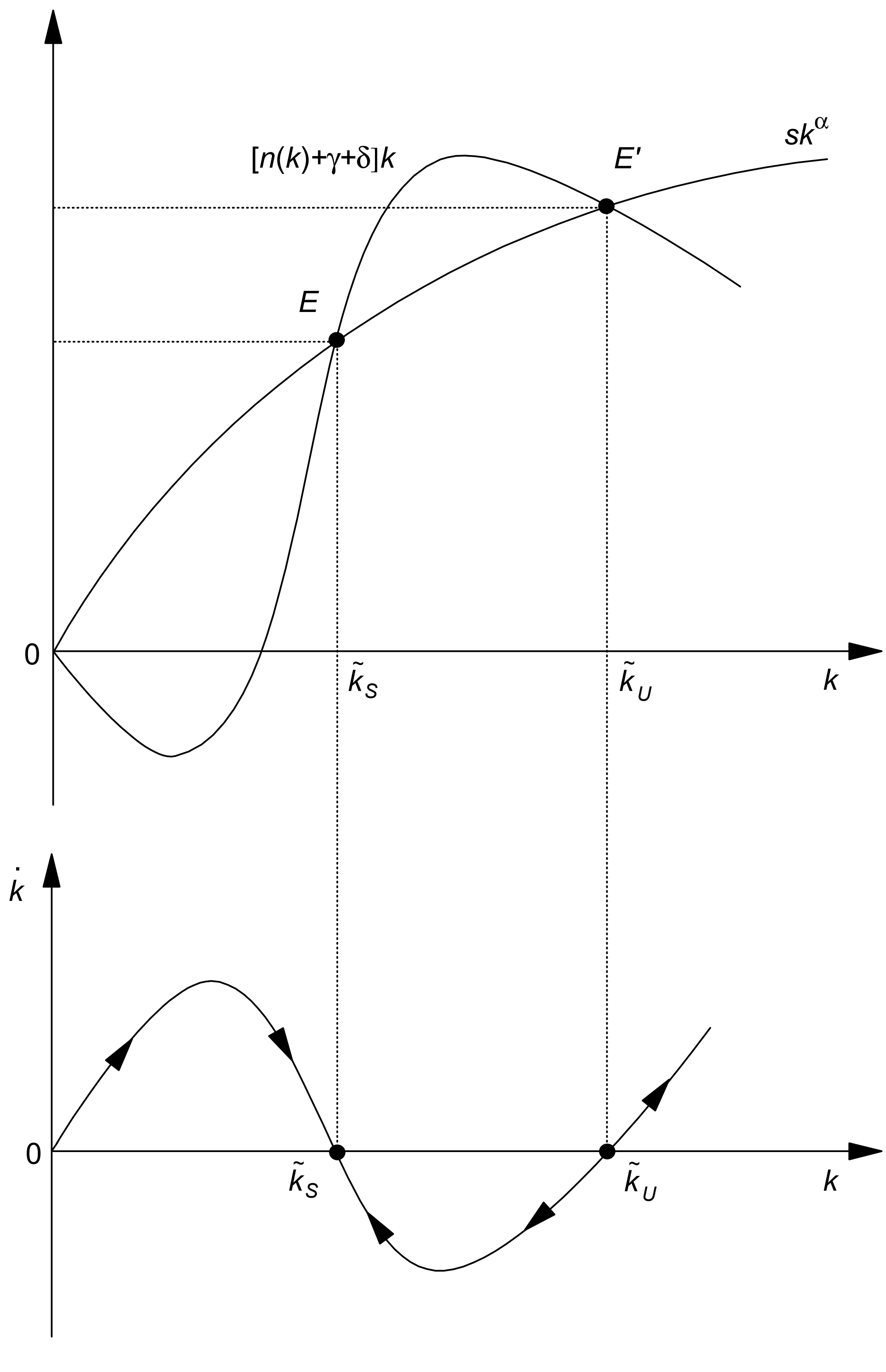


Figure 11.4
Force de travail endogène dans le modèle de Solow-Swan



Source : Adapté de Burmeister et Dobell (1970, p. 37).

Figure 11.5
Réduction du taux de croissance de la population dans le modèle de Solow-Swan

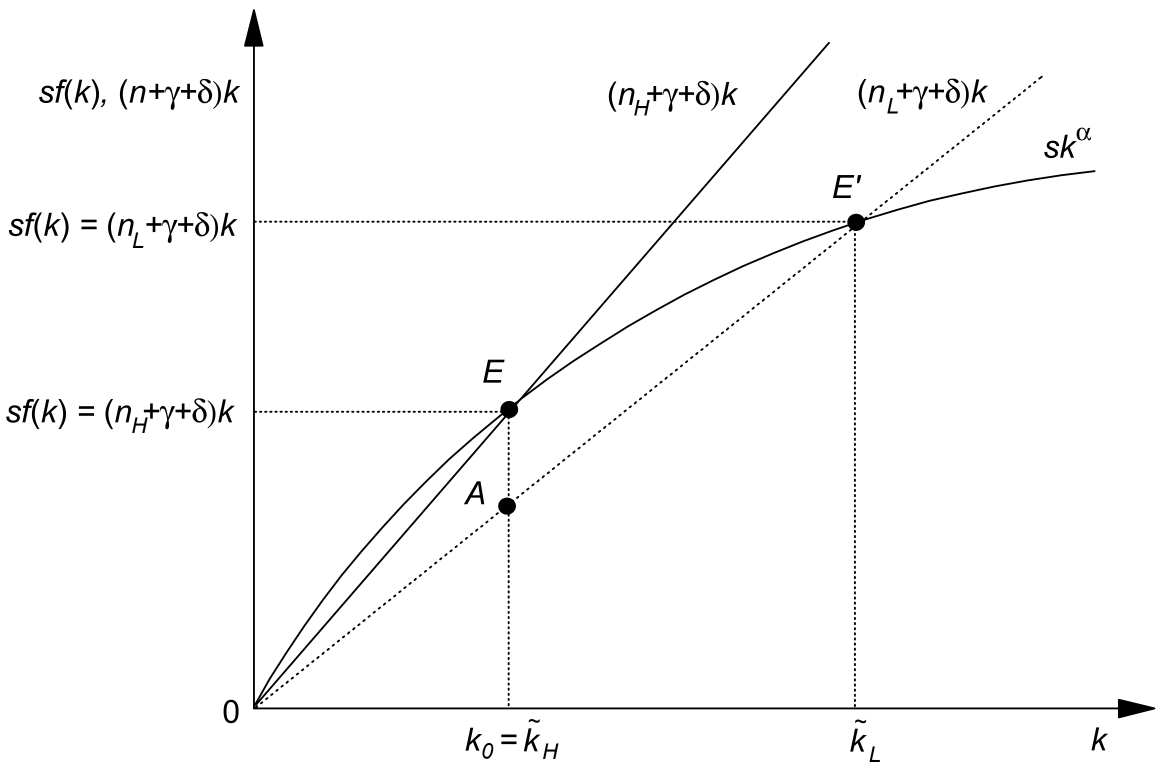


Figure 11.6
Augmentation du taux d'épargne dans le modèle de Solow-Swan